TD2 - Applications de la réduction d'endomorphisme

Systèmes Différentiels Linéaires

Exercice 1
Résoudre les systèmes différentiels linéaires :

1) $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -y \end{cases}$

2) $\begin{cases} x' = 2x + y + 3z \\ y' = -y + z \\ z' = z \end{cases}$

3) $\begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y \end{cases}$

Exercice 2
Résoudre les systèmes différentiels linéaires :

1) $\begin{cases} x_1' = -x_1 + 3x_2 + e^t \\ x_2' = -2x_1 + 4x_2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x' = x + 8y + e^t \\ y' = 2x + y + e^{-3t} \end{cases}$

Exercice 3
Résoudre le système différentiel linéaire :

$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x \\ z' = x + y + z \end{cases}$$

Exercice 4
Résoudre le système différentiel linéaire :

$$\begin{cases} x' = 2x - y + 2z \\ y' = 10x - 5y + 7z \\ z' = 4x - 2y + 2z \end{cases}$$

Exercice 5
Résoudre les systèmes d'équations différentielles linéaires :

1) $\begin{cases} x' = 3x + y - z \\ y' = x + y + z \\ z' = 2x + 2z \end{cases}$

2) $\begin{cases} x' = 2y - 2z \\ y' = -2x + z \\ z' = 2x - y \end{cases}$

Exercice 6

Résoudre les systèmes d'équations différentielles linéaires :

1) $\begin{cases} x' = x + 2y + \cos t - \sin t \\ y' = -x - y + \sin t \end{cases}$

2) Pour $(x(0), y(0), z(0)) \in \mathbb{R}^3$, déterminer les solutions réelles de :

$$\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = -y + z \\ z' = x - z \end{cases}$$

Exercice 7

Résoudre le système différentiel linéaire :

$$\begin{cases} y_1' = -6y_1 + 5y_2 + 3y_3 + \frac{1}{x} \\ y_2' = -8y_1 + 7y_2 + 4y_3 \\ y_3' = -2y_1 + y_2 + \frac{2}{x} \end{cases}$$

Exercices Supplémentaires

Exercice 8 (Exponentielle de matrices)

On rappelle que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'exponentielle est définie par $e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$.

Calculer e^A pour les matrices suivantes :

1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

2) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

Exercice 9

Soit $J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ fixée.

1) Déterminer J^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2) Calculer e^J. En déduire e^{tJ} pour tout $t \in \mathbb{R}$.

3) Donner la solution du système différentiel linéaire à coefficients constants :

$$\begin{cases} X'(t) = JX(t) \\ X(0) = [c_1 \ c_2 \ c_3]^T \end{cases}$$