TD1 - Réduction d'Endomorphisme

Partie I : Éléments Propres

Exercice 1
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^2)$ défini par $f(x_1, x_2) = (-3x_2, x_1)$.

a) Trouver tous les éléments propres de f pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

b) Trouver tous les éléments propres de f pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Exercice 2
Trouver tous les éléments propres de f (sans utiliser le polynôme caractéristique).

1. $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^2)$ défini par $f(z_1, z_2) = (z_2, z_1)$.
2. $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^3)$ défini par $f(z_1, z_2, z_3) = (2z_2, 0, 5z_3)$.
3. $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ défini par $f(z_1, z_2, \ldots, z_n) = (z_1, 2z_2, \ldots, nz_n)$.

Exercice 3
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini pour tout $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$ par :

$$f(P) = (b + c) + (a + c)X + (a + b)X^2$$

Déterminer tous les éléments propres de f.

Exercice 4 (Propriétés propres d'un endomorphisme)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit f et g deux endomorphismes de E.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note : $f^k = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{k\ fois}$ où $f^0 = id_E$ et $f^{-k} = (f^{-1})^k$ si f est inversible.

1) Montrer que 0 est valeur propre de f **ssi** f est non bijectif.

2) Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres.
[on admettra que : $f \circ g$ est injectif $\Leftrightarrow$ $g \circ f$ est injectif].

3) Montrer que si λ est valeur propre de f, alors $\forall k \in \mathbb{N}$, λ^k est valeur propre de f^k.

4) Supposons que f est inversible. Soit λ une valeur propre de f.

   a) Montrer que $1/\lambda$ est valeur propre de f^{-1}.

   b) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, λ^{-k} est valeur propre de f^{-k}.

Exercice 5
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

A est une projection ($A^2 = A$).

1. Déterminer les éléments propres de A comme endomorphisme de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
2. Déterminer les éléments propres de A comme endomorphisme de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$.

Exercice 6
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A est une rotation d'angle 90°.

1) Déterminer les éléments propres de A, comme endomorphisme de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

2) Déterminer les éléments propres de A, comme endomorphisme de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$.

Exercice 7 (Propriétés propres d'une matrice carrée)
Soit A et B deux matrices carrées d'ordre n (A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

1) Montrer que A et A^T ont le même polynôme caractéristique.
Ont-elles les mêmes valeurs propres ? Ont-elles les mêmes sous-espaces propres ?

2) Montrer que 0 est valeur propre de A **ssi** A est non inversible.

3) Montrer que AB et BA ont les mêmes valeurs propres.

4) Montrer que si λ est valeur propre de A, alors $\forall k \in \mathbb{N}$, λ^k est valeur propre de A^k.

5) Supposons que $\det(A) \neq 0$. Soit λ une valeur propre de A. montrer que $\forall k \in \mathbb{Z}$, λ^k est valeur propre de A^k.

Exercice 8
$A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que V est vecteur propre de A. A quelle valeur propre de A est-il associé ?

2) Calculer A^2. Montrer que V est vecteur propre de A^2.
A quelle valeur propre de A^2 est-il associé ?

3) Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}. Montrer que V est vecteur propre de A^{-1}.
A quelle valeur propre de A^{-1} est-il associé ?

4) Etudier le cas générale où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ un vecteur propre de A.

Exercice 9
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & A & \longmapsto & A^T \end{array}$$

1) Vérifier que f est linéaire.

2) Déterminer les valeurs propres possibles de f.

3) Déterminer les éléments propres de f pour $n = 1$ et $n = 2$.

4) Quelles sont les sous-espaces propres de f pour $n \geq 2$.

Exercice 10
Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. On pose :

$$\forall P \in E, \quad f(P) = (2X+1)P - (X^2-1)P^{'}$$

1) Vérifier que f est un endomorphisme de E.
2) Ecrire la matrice A de f dans la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$.
3) Trouver les valeurs propres de f.
4) Déterminer les vecteurs propres de f.
5) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11 (Eléments propres sur un espaces vectoriel de dimension infinie)
Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \qquad f(P) = (X+1)(X-3)P^{'} - XP$$

Exercice 12 (Eléments propres sur un espaces vectoriel de dimension infinie)
Soit $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par $\varphi(P) = P^{'}$.
Déterminer les valeurs propres de φ ainsi que les sous-espaces propres associés.

Exercice 13 (Eléments propres sur un espaces vectoriel de dimension infinie)
Soit $E = C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et D l'endomorphisme de E qui à f associe sa dérivée $f^{'}$.
Déterminer les valeurs propres de D ainsi que les sous-espaces propres associés.

Exercice 14
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, telle que la somme des éléments de chaque ligne de A vaut 1.
Montrer que 1 est valeur propre de A.

Partie II : Diagonalisation

Exercice 15 (Rappels sur la trace et le déterminant)
On suppose que la matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivante a pour valeurs propres 7 et 8.

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ a & b \end{bmatrix}$$

Déterminer les valeurs de a et b.

Exercice 16
Diagonaliser dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ les matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 17
Soit $a \in \mathbb{R}$. Diagonaliser dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ les matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -a-1 & a & a+1 \\ -a & a & a+1 \end{pmatrix}$

Exercice 18
Diagonaliser dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie III : Trigonalisation

Exercice 19
Trigonaliser dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 20
Etudier et proposer différentes trigonalisations dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la matrice suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 21
Trigonaliser dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ les matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 5 & -17 & 25 \\ 2 & -9 & 16 \\ 1 & -5 & 9 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 22
Trigonaliser dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 23
Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ et soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

1) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2) Diagonaliser A pour $a = 0$, $b = 1$ et $c = 2$.

3) Trigonaliser A pour $a = b = c = 1$.

Exercice 24
Diagonaliser ou trigonaliser les matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

Partie IV : Suites Récurrentes

Exercice 25
Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ donné. Considérons le système de suites réelles récurrentes $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + y_n \\ y_{n+1} = x_n + 2y_n \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1) Ecrire le système sous la forme matricielle $X_{n+1} = AX_n$, en précisant les différentes matrices.

2) Calculer A^n. En déduire x_n et y_n en fonction de x_0, y_0 et n.

Exercice 26
Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 1$. Etudier la nature des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$u_0 \text{ et } v_0 \text{ sont données et } \forall n \in \mathbb{N}\ , \quad \begin{cases} u_{n+1} = au_n + bv_n \\ v_{n+1} = v_n \end{cases} \qquad (S)$$

1) En utilisant une récurrence.

2) En écrivant (S) sous forme matricielle.

Exercice 27
On considère la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$X_{n+1} = AX_n + B$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \text{ et } X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \text{ est donné.}$$

1) Montrer que la matrice $(I_2 - A)$ est inversible et calculer son inverse $(I_2 - A)^{-1}$.

2) Montrer qu'il existe une solution constante à cette suite récurrente, c'est-à-dire trouver une matrice $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telle que $X = AX + B$.

3) $\forall n \in \mathbb{N}$ on note $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et on pose $U_n = X_n - X$.

   a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} = AU_n$.
   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n = A^n U_0$.
   c) Calculer A^n.
   d) Donner en fonction de n, u_0 et v_0 l'expression des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   d) Etudier $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$.

4) En déduire que la suite de matrices colonnes $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers X.

Exercices Supplémentaires

Exercice 28
Diagonaliser dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 4 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 29
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad f(P) = P - (X+1)P^{'}$$

1) Justifier que f définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Déterminer les valeurs propres de f et justifier que f est diagonalisable.

Exercice 30
Soit $t \in \mathbb{R}$ et :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin t \\ -1 & 0 & \cos t \\ -\sin t & \cos t & 0 \end{pmatrix}$$

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ t.q. :

$$\mathcal{M}_B(f) = A$$

1) La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

2) Montrer que $B^{'} = (f^2(e_3), f(e_3), e_3)$ est une base de E.

3) Donner la matrice T de f dans la base $B^{'}$ et en déduire une trigonalisation de A.

Exercice 31
Soit $m \in \mathbb{R}^*$. Considérons la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & m & m^2 \\ 1/m & 0 & m \\ 1/m^2 & 1/m & 0 \end{pmatrix}$$

A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.