

---

# TD1 - RÉDUCTION D'ENDOMORPHISME

---

## Partie I : Éléments Propres

---

### Exercice 1

Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^2)$  défini par  $f(x_1, x_2) = (-3x_2, x_1)$ .

- Trouver tous les éléments propres de  $f$  pour  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .
- Trouver tous les éléments propres de  $f$  pour  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

### Exercice 2

Trouver tous les éléments propres de  $f$  (sans utiliser le polynôme caractéristique).

- $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^2)$  défini par  $f(z_1, z_2) = (z_2, z_1)$ .
- $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^3)$  défini par  $f(z_1, z_2, z_3) = (2z_2, 0, 5z_3)$ .
- $n \in \mathbb{N}^*$  et  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$  défini par  $f(z_1, z_2, \dots, z_n) = (z_1, 2z_2, \dots, nz_n)$ .

### Exercice 3

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$  défini pour tout  $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$  par :

$$f(P) = (b + c) + (a + c)X + (a + b)X^2$$

Déterminer tous les éléments propres de  $f$ .

### Exercice 4

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

A est une projection ( $A^2 = A$ ).

- Déterminer les éléments propres de A, comme endomorphisme de  $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ .
- Déterminer les éléments propres de A, comme endomorphisme de  $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ .

### Exercice 5

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A est une rotation d'angle  $90^\circ$ .

- Déterminer les éléments propres de A, comme endomorphisme de  $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ .
- Déterminer les éléments propres de A, comme endomorphisme de  $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ .

**Exercice 6** (Propriétés propres d'un endomorphisme)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soit  $f$  et  $g$  deux endomorphismes de  $E$ .

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on note :  $f^k = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_k$  où  $f^0 = id_E$  et  $f^{-k} = (f^{-1})^k$  si  $f$  est inversible.

- 1) Montrer que 0 est valeur propre de  $f$  ssi  $f$  est non bijectif.
- 2) Montrer que  $f \circ g$  et  $g \circ f$  ont les mêmes valeurs propres.  
[ on admettra que :  $f \circ g$  est injectif  $\Leftrightarrow g \circ f$  est injectif ].
- 3) Montrer que si  $\lambda$  est valeur propre de  $f$ , alors  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda^k$  est valeur propre de  $f^k$ .
- 4) Supposons que  $f$  est inversible. Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $f$ .
  - a) Montrer que  $1/\lambda$  est valeur propre de  $f^{-1}$ .
  - b) Montrer que :  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lambda^{-k}$  est valeur propre de  $f^{-k}$ .

**Exercice 7** (Propriétés propres d'une matrice carrée)

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices carrées d'ordre  $n$  ( $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ).

- 1) Montrer que  $A$  et  $A^T$  ont le même polynôme caractéristique.  
Ont-elles les mêmes valeurs propres ? Ont-elles les mêmes sous-espaces propres ?
- 2) Montrer que 0 est valeur propre de  $A$  ssi  $A$  est non inversible.
- 3) Montrer que  $AB$  et  $BA$  ont les mêmes valeurs propres.
- 4) Montrer que si  $\lambda$  est valeur propre de  $A$ , alors  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda^k$  est valeur propre de  $A^k$ .
- 5) Supposons que  $\det(A) \neq 0$ . Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$ . montrer que  $\forall k \in \mathbb{Z}$ ,  $\lambda^k$  est valeur propre de  $A^k$ .

**Exercice 8**

$A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- 1) Montrer que  $V$  est vecteur propre de  $A$ . A quelle valeur propre de  $A$  est-il associé ?
- 2) Calculer  $A^2$ . Montrer que  $V$  est vecteur propre de  $A^2$ .  
A quelle valeur propre de  $A^2$  est-il associé ?
- 3) Montrer que  $A$  est inversible et calculer  $A^{-1}$ . Montrer que  $V$  est vecteur propre de  $A^{-1}$ .  
A quelle valeur propre de  $A^{-1}$  est-il associé ?
- 4) Etudier le cas générale où  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  un vecteur propre de  $A$ .

**Exercice 9**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et

$$\begin{array}{ccc} f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A^T \end{array}$$

- 1) Vérifier que  $f$  est linéaire.
- 2) Déterminer les valeurs propres possibles de  $f$ .
- 3) Déterminer les éléments propres de  $f$  pour  $n = 1$  et  $n = 2$ .
- 4) Quelles sont les sous-espaces propres de  $f$  pour  $n \geq 2$ .

**Exercice 10**

Soit  $E = \mathbb{R}_2[X]$ . On pose :

$$\forall P \in E, \quad f(P) = (2X + 1)P - (X^2 - 1)P'$$

- 1) Vérifier que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .
- 2) Ecrire la matrice  $A$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ .
- 3) Trouver les valeurs propres de  $f$ .
- 4) Déterminer les vecteurs propres de  $f$ .
- 5) Calculer  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 11** (Eléments propres sur un espaces vectoriel de dimension infinie)

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}[X]$  défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad f(P) = (X + 1)(X - 3)P' - XP$$

**Exercice 12** (Eléments propres sur un espaces vectoriel de dimension infinie)

Soit  $\varphi : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ , l'endomorphisme de  $\mathbb{R}[X]$  défini par  $\varphi(P) = P'$ .

Déterminer les valeurs propres de  $\varphi$  ainsi que les sous-espaces propres associés.

**Exercice 13** (Eléments propres sur un espaces vectoriel de dimension infinie)

Soit  $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $D$  l'endomorphisme de  $E$  qui à  $f$  associe sa dérivée  $f'$ .

Déterminer les valeurs propres de  $D$  ainsi que les sous-espaces propres associés.

**Exercice 14**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , telle que la somme des éléments de chaque ligne de  $A$  vaut 1.

Montrer que 1 est valeur propre de  $A$ .

## Partie II : Diagonalisation

**Exercice 15** (Rappels sur la trace et le déterminant)

On suppose que la matrice  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  suivante a pour valeurs propres 7 et 8.

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ a & b \end{bmatrix}$$

Déterminer les valeurs de  $a$  et  $b$ .

**Exercice 16**

Diagonaliser dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  les matrices suivantes :

$$1. A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2. B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3. C = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

**Exercice 17**

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Diagonaliser dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  les matrices suivantes :

$$1. A = \begin{pmatrix} -1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2. B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -a-1 & a & a+1 \\ -a & a & a+1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 18**

Diagonaliser dans  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$


---

### Partie III : Trigonalisation

---

**Exercice 19**

Trigonaliser dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

**Exercice 20**

Etudier et proposer différentes trigonalisations dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  de la matrice suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

**Exercice 21**

Trigonaliser dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  les matrices suivantes :

$$1. A = \begin{pmatrix} 5 & -17 & 25 \\ 2 & -9 & 16 \\ 1 & -5 & 9 \end{pmatrix} \qquad 2. B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

**Exercice 22**

Trigonaliser dans  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 23**

Soit  $a, b, c \in \mathbb{R}$  et soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

- 1) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $A$  soit diagonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .
- 2) Diagonaliser  $A$  pour  $a = 0$ ,  $b = 1$  et  $c = 2$ .
- 3) Trigonaliser  $A$  pour  $a = b = c = 1$ .

---

## Partie IV : Suites Récurrentes

---

### Exercice 24

Soit  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  donné. Considérons le système de suites réelles récurrentes  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  défini par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + y_n \\ y_{n+1} = x_n + 2y_n \end{cases}$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

- 1) Ecrire le système sous la forme matricielle  $X_{n+1} = AX_n$ , en précisant les différentes matrices.
- 2) Calculer  $A^n$ . En déduire  $x_n$  et  $y_n$  en fonction de  $x_0, y_0$  et  $n$ .

### Exercice 25

Soit  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a \neq 1$ . Etudier la nature des suites réelles  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par :

$$u_0 \text{ et } v_0 \text{ sont données et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = au_n + bv_n \\ v_{n+1} = v_n \end{cases} \quad (S)$$

- 1) En utilisant une récurrence.
- 2) En écrivant (S) sous forme matricielle.

### Exercice 26

On considère la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de matrices de  $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par

$$X_{n+1} = AX_n + B$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \text{ et } X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \text{ est donné.}$$

- 1) Montrer que la matrice  $(I_2 - A)$  est inversible et calculer son inverse  $(I_2 - A)^{-1}$ .
- 2) Montrer qu'il existe une solution constante à cette suite récurrente, c'est-à-dire trouver une matrice  $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  telle que  $X = AX + B$ .
- 3)  $\forall n \in \mathbb{N}$  on note  $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$  et on pose  $U_n = X_n - X$ .
  - a) Justifier que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $U_{n+1} = AU_n$ .
  - b) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $U_n = A^n U_0$ .
  - c) Calculer  $A^n$ .
  - d) Donner en fonction de  $n, u_0$  et  $v_0$  l'expression des suites réelles  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
  - d) Etudier  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$ .
- 4) En déduire que la suite de matrices colonnes  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $X$ .

---

## Exercices Supplémentaires

---

**Exercice 27**

Soit  $t \in \mathbb{R}$  et :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin t \\ -1 & 0 & \cos t \\ -\sin t & \cos t & 0 \end{pmatrix}$$

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3 et  $B = (e_1, e_2, e_3)$  une base de  $E$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  t.q. :

$$\mathcal{M}_B(f) = A$$

- 1) La matrice  $A$  est-elle diagonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  ?
- 2) Montrer que  $B' = (f^2(e_3), f(e_3), e_3)$  est une base de  $E$ .
- 3) Donner la matrice  $T$  de  $f$  dans la base  $B'$  et en déduire une trigonalisation de  $A$ .

**Exercice 28**

Diagonaliser ou trigonaliser les matrices suivantes :

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad 2. B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \quad 3. C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

**Exercice 29**

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$  définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad f(P) = P - (X+1)P'$$

- 1) Justifier que  $f$  définit un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
- 2) Déterminer les valeurs propres de  $f$  et justifier que  $f$  est diagonalisable.

**Exercice 30**

Diagonaliser dans  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 4 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

**Exercice 31**

Soit  $m \in \mathbb{R}^*$ . Considérons la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & m & m^2 \\ 1/m & 0 & m \\ 1/m^2 & 1/m & 0 \end{pmatrix}$$

$A$  est-elle diagonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  ? Calculer  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .