

## Fiche d'exercices

### Systèmes différentiels linéaires

#### Exercice 1 - Exponentielle de matrices

Calculer  $e^A$  pour les matrices suivantes :

$$1) A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$2) A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

#### Exercice 2 -

Soit  $J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$  où  $\lambda \in \mathbb{R}$  fixée.

- 1) Déterminer  $J^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .
- 2) Calculer  $e^J$ . En déduire  $e^{tJ}$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .
- 3) Donner la solution du système différentiel linéaire à coefficients constants :

$$\begin{cases} X'(t) = JX(t) \\ X(0) = [c_1 \ c_2 \ c_3]^T \end{cases}$$

#### Exercice 3 - Résoudre les systèmes différentiels linéaires :

$$1) \begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -y \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x' = 2x + y + 3z \\ y' = -y + z \\ z' = z \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y \end{cases}$$

#### Exercice 4 - Résoudre les systèmes différentiels linéaires :

$$1) \begin{cases} x_1' = -x_1 + 3x_2 + e^t \\ x_2' = -2x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x' = x + 8y + e^t \\ y' = 2x + y + e^{-3t} \end{cases}$$

**Exercice 5** - Résoudre le système différentiel linéaire :

$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x \\ z' = x + y + z \end{cases}$$

**Exercice 6** - Résoudre le système différentiel linéaire :

$$\begin{cases} x' = 2x - y + 2z \\ y' = 10x - 5y + 7z \\ z' = 4x - 2y + 2z \end{cases}$$

**Exercice 7** - Résoudre les systèmes d'équations différentielles linéaires :

$$1) \begin{cases} x' = 3x + y - z \\ y' = x + y + z \\ z' = 2x + 2z \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x' = 2y - 2z \\ y' = -2x + z \\ z' = 2x - y \end{cases}$$

**Exercice 8** - Résoudre les systèmes d'équations différentielles linéaires :

$$1) \begin{cases} x' = x + 2y + \cos t - \sin t \\ y' = -x - y + \sin t \end{cases}$$

2) Pour  $(x(0), y(0), z(0)) \in \mathbb{R}^3$ , déterminer les solutions réelles de :

$$\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = -y + z \\ z' = x - z \end{cases}$$

**Exercice 9** - Résoudre le système différentiel linéaire :

$$\begin{cases} y_1' = -6y_1 + 5y_2 + 3y_3 + \frac{1}{x} \\ y_2' = -8y_1 + 7y_2 + 4y_3 \\ y_3' = -2y_1 + y_2 + \frac{2}{x} \end{cases}$$