Feuille d'exercices

Forme bilinéaire

Exercice 1 - Forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$
φ est une application sur $\mathbb{R}^n$.

1) Montrer que φ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ **ssi** il existe $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\varphi(x) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n, \quad \forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

2) Donner la matrice de φ relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}$.

3) On suppose que $n = 3$ et $a_1 = a_2 = a_3 = 1$. Déterminer l'hyperplan $H = Ker(\varphi)$.

Exercice 2 - Forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$
Déterminer la forme linéaire f définie sur $\mathbb{R}^3$ telle que

$$f(1,1,1) = 0 \quad ; \quad f(2,0,1) = 1 \quad ; \quad f(1,2,3) = 4$$

Donner une base du noyau de f.

Exercice 3 - Forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ | Trace d'une matrice
L'application *trace* est définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$\forall A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \qquad tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

1) Montrer que tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2) Montrer que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $tr(AB) = tr(BA)$.

3) Ici $n = 2$. Soit $H = Ker(tr)$. Donner la dimension de H et déterminer une base de H.

Exercice 4 - Forme bilinéaire antisymétrique
Soit φ la forme sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ définie pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ par :

$$\varphi(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

1) Montrer que φ est anti-symétrique. φ est-elle symétrique ?

2) Montrer que φ est bilinéaire.

Exercice 5 - Forme de Lorentz
Soit $c > 0$ un paramètre réel et $\varphi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ et $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$ par :

$$\varphi(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - c^2 x_4 y_4$$

1) Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^4$.

2) φ est-elle positive ? définie ?

3) On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Donner la matrice de φ dans $\mathcal{B}$.

Exercice 6 - Déterminer la forme bilinéaire φ sur $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Exercice 7 - Matrice d'une forme bilinéaire
Considérons la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$: $\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\varphi(x, y) = 5x_1y_1 + 7x_1y_2 + 7x_2y_1 + 10x_2y_2$$

1) Déterminer la matrice de φ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$. φ est-elle symétrique ?
2) Soit $\mathcal{B}' = (v_1, v_2)$ avec $v_1 = (3, -2)$ et $v_2 = (-1, 1)$.
   Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}'$. Donner l'expression de φ par rapport à $\mathcal{B}'$.

Exercice 8 - Matrice d'une forme bilinéaire
Considérons la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$: $\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\varphi(x, y) = -2x_1y_2 + 2x_2y_1$$

1) Déterminer la matrice de φ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$. φ est-elle antisymétrique ?
2) Soit $\mathcal{B}' = (v_1, v_2)$ avec $v_1 = (1, -1)$ et $v_2 = (1, 1)$.
   Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}'$. Donner l'expression de φ par rapport à $\mathcal{B}'$.

Exercice 9 - $\mathbb{R}^3$ est rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit f la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^3$ définie par : $\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et $\forall y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$f(x, y) = x_1y_1 + 6x_2y_2 + 56x_3y_3 - 2(x_1y_2 + x_2y_1) + 7(x_1y_3 + x_3y_1) - 18(x_2y_3 + x_3y_2)$$

1) Donner la matrice A de f par rapport à la base $\mathcal{B}$.
2) Soit :
$$e'_1 = e_1 \quad ; \quad e'_2 = 2e_1 + e_2 \quad ; \quad e'_3 = -3e_1 + 2e_2 + e_3$$
   Montrer que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3) Donner la matrice A' de f par rapport à $\mathcal{B}'$. Donner l'expression de f par rapport à $\mathcal{B}'$.
4) Soit q la forme quadratique associé à f, i.e. :
$$q(x) = f(x, x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$$
   a) Donner l'expression de $q(x)$ par rapport aux composantes de x dans chacune des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
   b) f est-elle positive ? définie ?

Exercice 10 - Soit E un $\mathbb{R}$-ev. Montrer que

$$\mathcal{L}_{2,s}(E \times E;\ \mathbb{R}) \oplus \mathcal{L}_{2,a}(E \times E;\ \mathbb{R}) = \mathcal{L}_2(E \times E;\ \mathbb{R})$$

Exercice 11 - Considérons les formes bilinéaires sur $\mathbb{R}^n$ suivantes :

1) $n = 2$ et $\varphi(x, y) = x_1y_1 - 2x_2y_2$.

2) $n = 3$ et $\varphi(x, y) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_2 - 2x_2y_3 - x_3y_1 - 2x_3y_3$.

3) $n = 3$ et $\varphi(x, y) = x_1y_1 - 3x_2y_2 - x_3y_3$.

4) $n = 3$ et $\varphi(x, y) = -x_1y_2 - 2x_1y_3 + x_2y_1 - 3x_2y_3 + 2x_3y_1 + 3x_3y_2$.

Déterminer la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ de chacune des $f.b.$ φ.
A partir de A, φ est-elle symétrique ? antisymétrique ?
Si φ est symétrique, φ est-elle positive ? définie ?

Exercice 12 - Forme sur un espace de dimension infinie
Note : Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle.
L'intégrale sur I, de toute fonction continue et positive sur I, existe toujours. Elle est finie ou infinie.

1) Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On définit l'application φ sur E par

$$\varphi(f) = \int_0^{+\infty} |f(x)|e^{-x}dx \quad \forall f \in E$$

φ est-elle une forme sur E ?

2) Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On définit l'application φ sur E par

$$\varphi(f) = \int_0^{+\infty} P(x)e^{-x}dx \quad \forall P \in E$$

φ est-elle une forme sur E ? Si oui, est-elle linéaire ?