# Feuille d'exercices

Espace préhilbertien réel

**Exercice 1** - Pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, on pose :

$$\varphi(x, y) = (x_1 - 2x_2)(y_1 - 2y_2) + x_2y_2 + (x_2 + x_3)(y_2 + y_3)$$

Montrer que $\varphi$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

**Exercice 2** - Montrer que l'application $\varphi$ suivante est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[x]$ :

$$\varphi(P, Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)\, dx \qquad \forall P, Q \in \mathbb{R}[x]$$

**Exercice 3** - Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la forme $\varphi$ suivante est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$ :

$$\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k) \qquad \forall P, Q \in \mathbb{R}_n[x]$$

**Exercice 4** - Soit $E = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$. Pour tout $f, g \in E$, on pose

$$\varphi(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)(1 - t^2)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que $\varphi$ définit un produit scalaire sur $E$.

**Exercice 5** - Soit $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. Pour tout $f, g \in E$, on pose

$$\varphi(f, g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que $\varphi$ est un produit scalaire sur $E$.

**Exercice 6** - Soit $E$ un $\mathbb{R}$-ev non réduit à $\{0_E\}$, $\varphi$ un produit scalaire sur $E$, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $\psi$ la forme sur $E \times E$ définie par : $\forall x, y \in E$ :

$$\psi(x, y) = a\varphi(x, x) + b\varphi(x, y) + c\varphi(y, y)$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a, b, c)$ pour que $\psi$ soit un produit scalaire sur $E$.

**Exercice 7** - Inégalité de Schwarz

En utilisant l'inégalité de Schwarz, démontrer les inégalités ci-dessous et en étudier les cas d'égalité. Pour chaque cas, préciser l'espace préhilbertien $(E, \langle . , . \rangle)$ dans lequel on travaille et les vecteurs de $E$ concernés.

1) $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n :\ (x_1 + \cdots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + \cdots + x_n^2)$.

2) $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^{*+})^n :\ (x_1 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2$.

3) $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) :\ (tr(M))^2 \leq n\ tr(M^T M)$.

4) Pour toute fonction $f$ continue et strictement positive sur $[a, b]$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$ :

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx\right) \geq (b-a)^2$$

**Exercice 8** - Norme euclidienne

Sur $\mathbb{R}^2$, on définit les fonctions suivantes

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| \quad ; \quad \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \qquad \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

1) a) Vérifier que $\|.\|_1$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
   b) Montrer que $\|.\|_1$ n'est pas une norme euclidienne.

2) a) Vérifier que $\|.\|_2$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
   *Indication* : Pour $x, y \in \mathbb{R}^2$ fixés, étudier le discriminant de la fonction polynomiale de degré 2 définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$f(t) = \|x + ty\|_2^2, \ \forall t \in \mathbb{R}$$

   b) Montrer que $\|.\|_2$ est une norme euclidienne et déterminer le produit scalaire associé.

**Exercice 9** - Orthogonalité

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire usuel :

$$\langle A, B\rangle = tr(A^T B) \ ; \qquad \forall A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

1) Montrer que $A \perp B$.

2) Déterminer le s.e.v. $\{A\}^\perp$ et donner sa dimension.

**Exercice 10** - Famille orthonormale | Espace de fonctions

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, le $\mathbb{R}$-ev des fonctions continues sur le segment $[a, b]$ et à valeurs réelles. Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt \qquad \forall f, g \in E$$

1) Montrer que $\varphi$ est un produit scalaire sur $E$.

2) Considérons la suite de fonctions définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad f_n : t \in [0,1] \mapsto \cos(2\pi n t)$$

   Montrer que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille orthogonale. Est-elle orthonormale ?

3) On pose $g_n = \sqrt{2} f_n$. Montrer que la famille $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est orthonormale.

**Rappel**. $\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$

**Exercice 11** - Base orthonormale | Espace $\mathbb{R}^4$

$\mathbb{R}^4$ est muni de son produit scalaire usuel. Soit

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}(1,1,1,1) \ ; \ \varepsilon_2 = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1) \ ; \ \varepsilon_3 = \frac{1}{2}(1,1,-1,-1)$$

a) Montrer que la famille $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est orthonormale.

b) Déterminer les vecteurs $\varepsilon_4$ tels que la famille $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ soit une base orthonormale de $\mathbb{R}^4$.

**Exercice 12** - Base orthogonale | Espace de polynômes

Déterminer une base orthogonale de $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)\ dx \quad \forall P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$$

**Exercice 13** - Base orthonormale | Espace de matrices

$\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire usuel :

$$\langle A, B\rangle = tr(A^T B)\ ; \qquad \forall A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Déterminer une base orthonormale du s.e.v. $F$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par les matrices

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Exercice 14** - Supplémentaire orthogonal

Considérons l'espace euclidien usuel $(\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}), \langle . , . \rangle)$. Soit

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad U_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

1) On pose $E_1 = Vect\{U_1, U_2\}$ et $E_2 = Vect\{V_1, V_2\}$. Montrer que $E = E_1 \overset{\perp}{\oplus} E_2$.

2) La famille $\{U_1, U_2, V_1, V_2\}$ est-elle une base orthogonale de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ ?

**Exercice 15** - Supplémentaire et orthogonalité

Soit $(E, \langle . , . \rangle)$ un espace euclidien. Soit $E_1$ et $E_2$ deux s.e.v. supplémentaires dans $E$. Montrer que $E = E_1^{\perp} \oplus E_2^{\perp}$.