Systèmes différentiels linéaires

Khalid El Amine I.
Department of Mathematics and Finance

★★★

1 Équation différentielle linéaire du premier ordre

1.1 Équation différentielle linéaire homogène du premier ordre

Définition 1.1 *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $a \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.*

• *On appelle équation différentielle linéaire homogène du premier ordre, une équation différentielle de la forme :*

$$x'(t) = a(t)x(t) \qquad (EH)$$

• *On dit qu'une fonction f est solution de (EH) sur l'intervalle I, si f est dérivable sur I et si :*

$$f'(t) = a(t)f(t) \qquad \forall t \in I$$

Remarques :

1) La fonction nulle est solution de l'équation (EH).

2) (EH) peut admettre une infinité de solutions.

Proposition 1.2 *L'ensemble E_h des solutions de l'équation différentielle (EH) est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*

Preuve :

Théorème 1.3 *L'ensemble E_h des solutions de l'équation différentielle (EH) est donné par :*

$$E_h = \{f : t \in I \mapsto ce^{A(t)} \quad ; \quad c \in \mathbb{R}\}$$

où A désigne une primitive de a sur I.

• *E_h est un $\mathbb{R}$-ev de dimension 1.*

▶ *L'application $x : t \in I \mapsto x(t) = ce^{A(t)}$ est appelée solution générale de (EH).*

Preuve :

Exemple 1 : La solution générale sur $\mathbb{R}$ (ou sur n'importe quel intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$) de l'équation différentielle homogène

$$x'(t) = -2x(t) \quad (EH)$$

est

$$x(t) = ce^{-2t}, \quad c \in \mathbb{R}$$

1.2 Équation différentielle linéaire non homogène du premier ordre

1.2.1 Solution générale

Définition 1.4 *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $a, b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.*

• *On appelle équation différentielle linéaire non homogène du premier ordre, une équation différentielle de la forme :*

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \qquad (E)$$

On dit qu'une fonction f est solution de (E) sur l'intervalle I, si f est dérivable sur I et si :

$$f'(t) = a(t)f(t) + b(t) \qquad \forall t \in I$$

• *On appelle équation différentielle homogène associée à (E), l'équation différentielle :*

$$x'(t) = a(t)x(t) \qquad (EH)$$

Théorème 1.5 *Soit f_p une solution particulière sur I de l'équation différentielle (E) et A une primitive de a sur I. L'ensemble E des solutions de l'équation différentielle (E) est :*

$$E = \{f : t \in I \mapsto ce^{A(t)} + f_p(t) \quad ; \quad c \in \mathbb{R}\}$$

où A désigne une primitive de a sur I.

Preuve :

Méthode de la variation de la constante

La Méthode de la variation de la constante est un moyen calculatoire qui permet de déterminer une solution particulière f_p de l'équation différentielle (E). On cherche une solution particulière de la forme :

$$f_p : t \in I \mapsto c(t)e^{A(t)}$$

où la fonction inconnue c est déterminée en exprimant que f_p doit satisfaire l'équation différentielle (E). Nous avons alors pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned}
f_p \text{ est solution de } (E) &\Leftrightarrow f_p'(t) = a(t)f_p(t) + b(t) \\
&\Leftrightarrow (c(t)e^{A(t)})' = a(t)c(t)e^{A(t)} + b(t) \\
&\Leftrightarrow c'(t)e^{A(t)} + c(t)a(t)e^{A(t)} = a(t)c(t)e^{A(t)} + b(t) \\
&\Leftrightarrow c'(t)e^{A(t)} = b(t) \\
&\Leftrightarrow c'(t) = b(t)e^{-A(t)} \\
&\Leftrightarrow c(t) = \int b(t)e^{-A(t)}dt
\end{aligned}$$

ce qui établit que $f_p(t) = \left(\int b(t)e^{-A(t)}dt\right) e^{A(t)}$ est bien une solution particulière de (E).

On peut alors reformuler le théorème précédent de la manière suivante :

Proposition 1.6 *L'ensemble E des solutions de l'équation différentielle (E) est :*

$$E = \left\{f : t \in I \mapsto \left(c + \int b(t)e^{-A(t)}\,dt\right) e^{A(t)} \quad ; \quad c \in \mathbb{R}\right\}$$

où $A(t)$ désigne une primitive de $a(t)$ sur I i.e. :

$$A(t) = \int a(t)\,dt$$

▶ *L'application* $x : t \in I \mapsto x(t) = \left(c + \int b(t)e^{-A(t)}\, dt\right) e^{A(t)}$ *est appelée solution générale de* (E). *On décompose souvent* x *sous la forme :*

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad \text{où} \quad x_h(t) = ce^{A(t)} \quad \text{et} \quad x_p(t) = \left(\int b(t)e^{-A(t)}\, dt\right) e^{A(t)}$$

▶ *Les courbes représentatives des solutions de* (E) *sont appelées courbes intégrales de* (E).

Preuve :

Exemple : Déterminer la solution générale sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle non homogène :

$$x'(t) = 2x(t) - 2t \quad (E)$$

Solution :

1.2.2 Problème a valeur initiale : Existence et unicité

Théorème 1.7 (Cauchy-Lipschitz [Fr] | Picard-Lindelöf [En] | existence et unicité)
Soit $I \subset \mathbb{R}$ *un intervalle ouvert et* $a, b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.

$\forall t_0 \in I$ *et* $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ *; il existe une unique solution sur* I *au problème a valeur initiale (PVI) :*

$$\begin{cases} x'(t) = a(t)x(t) + b(t) & (E) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$x(t_0) = x_0$ *est appelée condition initiale.*

Preuve :

2 Système différentiel linéaire du premier ordre

2.1 Solution générale

Définition 2.1 *Soit* $I \subset \mathbb{R}$ *un intervalle ouvert. On appelle système différentiel linéaire du premier ordre (sur* I*), un système de la forme*

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \quad (S)$$

Où :

• $A(t) = [a_{ij}(t)] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est une matrice donnée dont les coefficients* a_{ij} *sont des fonctions continues de la variable réelle* $t \in I$.

• $B(t) = [b_i(t)] \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *est un vecteur donné, appelé second membre, dont les composantes* b_i *sont des fonctions continues de la variable réelle* $t \in I$.

• $X(t) = [x_i(t)] \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *est le vecteur inconnu, où* $X'(t) = [x_i'(t)]$.

▶ *On dit que le système est à coefficients constants si la matrice* A *ne dépend pas de la variable* t.

▶ *On dit que le système est homogène si* $B(t) = 0,\ \forall t \in I$, *i.e. :*

$$X'(t) = A(t)X(t) \quad (SH)$$

Théorème 2.2 (Solution générale du système différentiel non-homogène)
Soit X_h la solution générale sur I du système différentiel homogène (SH)

$$X'(t) = A(t)X(t) \qquad (SH)$$

Soit X_p une solution particulière sur I du système différentiel non-homogène (S)

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \qquad (S)$$

La solution générale sur I du système différentiel non-homogène (S) est alors :

$$X(t) = X_h(t) + X_p(t)$$

Preuve :

2.2 Problème a valeur initiale : Existence et unicité

Théorème 2.3 (Cauchy-Lipschitz [Fr] | Picard-Lindelöf [En] | existence et unicité)
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. Soit $A \in \mathcal{C}(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et $B \in \mathcal{C}(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$.
$\forall t_0 \in I$ et $\forall X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; il existe une unique solution sur I au problème a valeur initiale (PVI) :

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \qquad (S) \\ \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

$X(t_0) = X_0$ est appelée condition initiale.

Preuve :

2.3 Résolution des systèmes différentiels linéaires du premier ordre

On considère dans cette sous-section uniquement des systèmes différentiels linéaires du premier ordre à coefficients constants. La matrice A ne dépend donc pas de la variable réelle t, i.e. les systèmes du type

$$X'(t) = AX(t) + B(t) \qquad (S)$$

2.3.1 Résolution par réduction de matrice

Cas d'une matrice A diagonalisable

Supposons que $A = PDP^{-1}$; où D est diagonale. On a

$$\begin{aligned} X'(t) = AX(t) + B(t) \quad &\iff \quad X'(t) = PDP^{-1}X(t) + B(t) \\ &\iff \quad P^{-1}X'(t) = DP^{-1}X(t) + P^{-1}B(t) \\ &\iff \quad (P^{-1}X(t))' = D(P^{-1}X(t)) + (P^{-1}B(t)) \\ &\iff \quad Y'(t) = DY(t) + (P^{-1}B(t)) \qquad \text{avec} \quad Y(t) = P^{-1}X(t) \end{aligned}$$

Le système en Y obtenu est découplé. On résout ce système en $Y(t)$ puis on en déduit $X(t) = PY(t)$
Remarque : On ne calcul pas P^{-1} si $B(t) = 0$.

Algorithme - Pour résoudre le système différentiel : $X'(t) = AX(t) + B(t))$ où $A = PDP^{-1}$:

1) On pose : $Y(t) = P^{-1}X(t)$.
2) On résout le système : $Y'(t) = DY(t) + (P^{-1}B(t))$.

3) On en déduit $X(t) = PY(t)$.

Proposition 2.4 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $A = PDP^{-1}$ avec $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $P = [V_1 \ \dots \ V_n]$, alors la solution générale système différentiel homogène*

$$X'(t) = AX(t) \quad (SH)$$

est donnée par

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t} V_i \quad \text{avec} \quad c_i \in \mathbb{R}$$

- *La famille $\{e^{\lambda_1 t}V_1, \dots, e^{\lambda_n t}V_n]\}$ est appelée système fondamental de solutions.*
- *Toute solution de (DH) est combinaison linéaire de cette famille.*

Exemple 1 : Résoudre le système différentiel : $X'(t) = AX(t)$. Avec :

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Solution :

Exemple 2 : Résoudre le système différentiel : $X'(t) = AX(t)$. Avec :

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Solution :

Exemple 3 : Résoudre le système différentiel : $X'(t) = AX(t) + B(t)$. Avec :

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{bmatrix} t \\ 2t \end{bmatrix}$$

Solution :

Cas d'une matrice A trigonalisable

Supposons que $A = PTP^{-1}$; où T est triangulaire supérieure

$$\begin{aligned} X'(t) = AX(t) + B(t) &\iff X'(t) = PTP^{-1}X(t) + B(t) \\ &\iff P^{-1}X'(t) = TP^{-1}X(t) + P^{-1}B(t) \\ &\iff (P^{-1}X(t))' = T(P^{-1}X(t)) + (P^{-1}B(t)) \\ &\iff Y'(t) = TY(t) + (P^{-1}B(t)) \qquad \text{avec} \ \ Y(t) = P^{-1}X(t) \end{aligned}$$

Le système obtenu en Y n'est pas totalement découplé. On résout ce système en $Y(t)$ par une démarche rétrograde (on commence par la dernière équation), puis on en déduit $X(t) = PY(t)$

Remarque : On ne calcul pas P^{-1} si $B(t) = 0$.

Algorithme - Pour résoudre le système différentiel : $X'(t) = AX(t) + B(t))$ où $A = PTP^{-1}$:

1) On pose : $Y(t) = P^{-1}X(t)$.
2) On résout par démarche rétrograde le système : $Y'(t) = TY(t) + (P^{-1}B(t))$.
3) On en déduit $X(t) = PY(t)$.

Exemple 1 : Résoudre le système différentiel

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{lcll} x_1'(t) & = & 2x_1(t) + x_2(t) & (1) \\ x_2'(t) & = & -x_2(t) & (2) \end{array} \right.$$

Solution :

Exemple 2 : Résoudre le système différentiel $X'(t) = AX(t)$.

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solution :

2.3.2 Résolution par exponentielle de matrice

Exponentielle de matrice

Proposition 2.5 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la série de matrices*

$$\sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!} = I_n + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

est absolument convergente dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (donc convergente).

Preuve :

Définition 2.6 (Exponentielle de matrice)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit l'exponentielle de A par :

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Exemple : Soit $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$. Calculer e^D. Calculer e^{tD} pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Solution :

Exercice : Soit $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Calculer e^N et e^{tN} pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Solution :

Exercice : Calculer e^N et e^{tN} pour tout $t \in \mathbb{R}$.

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Proposition 2.7 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A, B, D, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où P est inversible et D est diagonale.*

1) $e^{O_n} = I_n$
2) $e^{I_n} = eI_n$
3) *Si* $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ *alors* $e^D = diag(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$
4) *Si* $A = PBP^{-1}$ *alors* $e^A = Pe^BP^{-1}$
5) *Si* $AB = BA$ *alors* $e^{A+B} = e^A e^B$
6) e^A *est toujours inversible et* $(e^A)^{-1} = e^{-A}$

Preuve :

Propriété 2.8 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\forall s, t \in \mathbb{K}$*

1) $e^{sA}e^{tA} = e^{(s+t)A}$

2) $(e^{tA})(e^{-tA}) = I_n$

3) $\dfrac{d}{dt}(e^{tA}) = Ae^{tA}$

4) $Ae^{tA} = e^{tA}A$

Preuve :

Proposition 2.9 (exponentielle de matrice diagonale par blocs)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale par blocs, i.e. de la forme :

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{bmatrix}$$

où les A_i sont des matrices carrés. Alors :

$$e^A = \begin{bmatrix} e^{A_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{A_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{A_p} \end{bmatrix}$$

Résolution par exponentielle

Théorème 2.10 *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $t_0 \in I$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

- *La solution générale sur I du système différentiel (SH) :*

$$X'(t) = AX(t) \qquad (SH)$$

est donnée par :

$$X(t) = e^{tA}C \quad \text{où} \quad C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

- *La solution unique sur I du (PVI) :*

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) \qquad (SH) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

est donnée par :

$$X(t) = e^{(t-t_0)A}X_0$$

Remarque : Pour un (PVI), C est obtenue par

$$C = e^{-t_0A}X_0$$

Preuve :

Remarque : Pour la résolution d'un (PVI), on ne calcule pas explicitement la matrice e^{tA}. On écrit la matrice $e^{tA} = PBP^{-1}$ et on ne calcule pas le produit de ces trois matrice. On écrit $e^{tA}X_0 = PBP^{-1}X_0$ et on effectue les produits successivement de droite à gauche, afin d'économiser le nombre de multiplications et d'additions.

Théorème 2.11 *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $t_0 \in I$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{C}(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$.*

- *La solution générale sur I du système différentiel (S) :*

$$X'(t) = AX(t) + B(t) \qquad (S)$$

est donnée par :

$$\begin{aligned} X(t) &= X_h(t) + X_p(t) \\ &= e^{tA}C + e^{tA}\int e^{-tA}B(t)\,dt \\ &= e^{tA}\left(C + \int e^{-tA}B(t)\,dt\right) \qquad \textit{avec} \quad C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

- *La solution unique sur I du (PVI) :*

$$(PVI) \quad \begin{cases} X'(t) = AX(t) + B(t) \qquad (S) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

est donnée par :

$$\begin{aligned} X(t) &= X_h(t) + X_p(t) \\ &= e^{(t-t_0)A}X_0 + e^{(t-t_0)A}\int_{t_0}^{t} e^{-(s-t_0)A}B(s)\,ds \\ &= e^{(t-t_0)A}X_0 + e^{tA}\int_{t_0}^{t} e^{-sA}B(s)\,ds \end{aligned}$$

Preuve :

Théorème 2.12 (Couple propre conjugué)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A admet un couple propre complexe $\{\lambda, v\}$ alors le couple complexe conjugué $\{\overline{\lambda}, \overline{v}\}$ est aussi un couple propre de A.

Preuve :

Remarque : Les racines complexes des polynômes P à coefficients réels ($P \in \mathbb{R}_n[x]$) apparaissent par paires conjuguées.