Réduction des endomorphismes

Khalid El Amine I.
Department of Mathematics and Finance

★★★

$\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$

1 Eléments propres d'un endomorphisme

1.1 Valeur propre et vecteur propre

Dans cette section, E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, de dimension quelconque.

Définition 1.1 (Valeur propre)
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est une valeur propre de f, s'il existe $v \in E \setminus \{0_E\}$ tel que :

$$f(v) = \lambda v$$

▶ *Le vecteur v est alors appelé vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.*

Définition 1.2 (Spectre)
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. L'ensemble des valeurs propres de f s'appelle le spectre de f, on le note $Sp_{\mathbb{K}}(f)$ ou $Sp(f)$.

Définition 1.3 (Vecteur propre)
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $v \in E \setminus \{0_E\}$. On dit que v est un vecteur propre de f, s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :

$$f(v) = \lambda v$$

▶ *Le scalaire λ est alors appelé valeur propre de f associé au vecteur propre v.*

Remarque : un vecteur propre est non nul, par définition.

Définition 1.4 (Eléments propres)
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$

- *Les valeurs propres et vecteurs propres de f sont appelés éléments propres de f.*
- *Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $v \in E$. On dit que λ et v sont des éléments propres associés si :*

$$v \neq 0_E \quad et \quad f(v) = \lambda v$$

Exemple 1 : Considérons l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (x - y/2, -x/2 + y)$$

a) Vérifier que $v_1 = (1, 1)$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1/2$.

b) Vérifier que $v_2 = (1, -1)$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre $\lambda_2 = 3/2$.

Solution :

1.2 Sous-espace propre

Proposition 1.5 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. L'ensemble E_λ défini par :*

$$E_\lambda = \{x \in E : f(x) = \lambda x\}$$

est un sous-espace vectoriel de E, et

$$E_\lambda = Ker(f - \lambda\, id_E)$$

Preuve :

Définition 1.6 (Sous-espace propre)
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de f. Le sous-espace vectoriel de E

$$E_\lambda = Ker(f - \lambda\, id_E)$$

est appelé le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ.

Proposition 1.7 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.*

$$\lambda \in Sp(f) \;\Leftrightarrow\; E_\lambda \neq \{0_E\} \;\Leftrightarrow\; (f - \lambda\, id_E) \text{ non injectif}$$

Preuve :

Proposition 1.8 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit v_1, v_2 deux vecteurs propres de f associés respectivement aux valeurs propres λ_1, λ_2.*

$$\text{Si } \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ alors la famille } \{v_1, v_2\} \text{ est libre dans } E$$

Preuve :

Théorème 1.9 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\{v_1, \ldots, v_p\}$ une famille de vecteurs propres de A associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$.*

$$\text{Si les } \lambda_i \text{ sont distinctes deux à deux, alors la famille } \{v_1, \ldots, v_p\} \text{ est libre dans } E$$

Preuve :

Sommes directes (rappel)

Définition 1.10 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Soit E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E.*
On dit que E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E si les deux conditions suivantes sont vérifiées

(1) $E = E_1 + E_2$

(2) $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$

Remarque : Si E et F sont deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ de dimension finie, alors

$$dim(E + F) = dim(E) + dim(F) - dim(F \cap F)$$

Théorème 1.11 *Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie . Soit E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E.*

E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E si l'une des propositions suivantes est vérifiée :

- $\forall x \in E,\ \exists!\ (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 : x = x_1 + x_2$
- $dim(E_1) + dim(E_2) = dim(E)$ *et* $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$
- $dim(E_1) + dim(E_2) = dim(E)$ *et* $E = E_1 + E_2$

Définition 1.12 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$; $\{F_1, \ldots, F_p\}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. On dit que la famille $\{F_1, \ldots, F_p\}$ est en somme directe si :*

$$\forall (x_1, \ldots, x_p) \in F_1 \times \ldots \times F_p, \quad x_1 + \ldots + x_p = 0 \ \Rightarrow \ x_1 = \ldots = x_p = 0$$

Dans ce cas, le sous espace vectoriel (de E), $F = F_1 + \ldots + F_p$ est appelé la somme directe des $F_1, \ldots, F_p$. On écrit :

$$F = F_1 \oplus \ldots \oplus F_p$$

Proposition 1.13 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$; $\{F_1, \ldots, F_p\}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. La somme $\sum\limits_{i=1}^{n} F_i$ est directe si et seulement si*

$$\forall i \in [\![2, n]\!], \quad F_i \cap \left(\sum_{j=1}^{i-1} F_j \right) = \{0\}$$

Théorème 1.14 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ des valeurs propres de f.*

Si les λ_i sont distinctes deux à deux, alors les sous-espace propres $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_p}$ sont en somme directe.

Preuve :

2 Eléments propres d'une matrice carrée

2.1 Valeur propre et vecteur propre

Dans cette section :

- $n \in \mathbb{N}^*$.
- $0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$ sera noté $0_{n,1}$, pour simplifier.

Remarque : Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ peut être considérée comme un endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Définition 2.1 (Valeur propre)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est une valeur propre de A, s'il existe $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0_{n,1}\}$ tel que :

$$AV = \lambda V$$

▶ *Le vecteur V est alors appelé vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.*

Définition 2.2 (Spectre)
L'ensemble des valeurs propres de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'appelle le spectre de A, on le note $Sp(A)$ ou $Sp_{\mathbb{K}}(A)$.

Définition 2.3 (Vecteur propre)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0_{n,1}\}$. On dit que V est un vecteur propre de A, s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :

$$AV = \lambda V$$

▶ *Le scalaire λ est alors appelé valeur propre de A associé au vecteur propre V.*

Définition 2.4 (Eléments propres)

• *Les valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont appelés éléments propres de A.*

• *Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On dit que λ et V sont des éléments propres associés si :*

$$V \neq 0_{n,1} \quad \text{et} \quad AV = \lambda V$$

Exemple : Considérons la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

et les trois vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ suivants :

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad V_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Vérifier que V_1, V_2 et V_3 sont des vecteurs propres de A et trouver les valeurs propres associées.

Solution :

2.2 Sous-espace propre

Proposition 2.5 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. L'ensemble E_λ défini par :*

$$E_\lambda = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) : AX = \lambda X\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, et alors

$$E_\lambda = Ker(A - \lambda\, I_n)$$

Preuve :

Définition 2.6 (Sous-espace propre)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de A. Le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

$$E_\lambda = Ker(A - \lambda\, I_n)$$

est appelé le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ.

Proposition 2.7 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :*

$$\lambda \in Sp(A) \;\Leftrightarrow\; E_\lambda \neq \{0_{n,1}\} \;\Leftrightarrow\; (A - \lambda\, I_n) \text{ non inversible}$$

Preuve :

Théorème 2.8 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\{V_1, \ldots, V_p\}$ une famille de vecteurs propres de A associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$.*

Si les λ_i sont distinctes deux à deux, alors la famille $\{V_1, \ldots, V_p\}$ est libre dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Preuve : La démonstration est la même que pour les endomorphismes (à faire en exercice).

Théorème 2.9 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des valeurs propres de A.*

Si les λ_i sont distinctes deux à deux, alors les sous-espace propres $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_p}$ sont en somme directe.

Preuve : La démonstration est la même que pour les endomorphismes (à faire en exercice).

3 Polynôme caractéristique

Dans cette section, $n \in \mathbb{N}^*$ et les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels sont de dimension finie.

3.1 Préliminaire

◇ Si E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E, tout vecteur $x \in E$ admet alors une décomposition unique :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

Les scalaires $x_i \in \mathbb{K}$ sont les composantes du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$.

Lorsqu'une base est fixée, on peut identifier E à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (ou bien identifier E à $\mathbb{K}^n$). Dans ce cas, on identifie aussi tout vecteur $x \in E$ au vecteur $X = [x_1 \dots x_n]^T \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, matrice unicolonne constituée des composantes de x dans la base $\mathcal{B}$.

◇ Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on notera $A = M_{\mathcal{B}}(f) = [a_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n}$, la matrice de f relativement à une base $\mathcal{B}$ quelconque de E.

Dans ce cadre, nous avons :

► λ est valeur propre de f si et seulement si λ est valeur propre de A. Autrement dit :

$$Sp(f) = Sp(A)$$

► x est vecteur propre de f si et seulement si X est vecteur propre de A.

Nous pouvons donc, dans le cadre de la dimension finie, choisir la formulation vectorielle

$$f(x) = \lambda x$$

ou la formulation matricielle

$$AX = \lambda X$$

pour le calcul des éléments propres.

Nous choisirons cette dernière, le plus souvent, pour toute la suite du chapitre.

Remarque : La formulation vectorielle est indispensable pour la recherche des éléments propres lorsque l'on travaille en dimension infinie.

Note : On confondra souvent un polynôme $P(X) \in \mathbb{K}_n[X]$ avec la fonction polynômiale associée $P(x) \in \mathbb{K}_n[x]$ avec $x \in \mathbb{K}$.

3.2 Polynôme caractéristique

Définition 3.1 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
• *On appelle polynôme caractéristique de A et on note $P_A(\lambda)$, le determinant de la matrice $(A - \lambda I_n)$.*

$$P_A(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$$

• *L'équation algébrique $P_A(\lambda) = 0$ s'appelle équation caractéristique de A.*

Proposition 3.2 *Deux matrices (de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) semblables ont le même polynôme caractéristique.*

Preuve :

► Comme deux matrices semblables différentes représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes, cette proposition nous permet donc de donner la définition :

Définition 3.3 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On appelle polynôme caractéristique de f et on note $P_f(\lambda)$, le determinant de la matrice $M_{\mathcal{B}}(f - \lambda id_E)$.*

$$P_f(\lambda) = det(M_{\mathcal{B}}(f - \lambda id_E))$$

Où $\mathcal{B}$ est une base quelconque de E.

Proposition 3.4 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :*

$$\lambda \textit{ est valeur propre de } A \textit{ si et seulement si } P_A(\lambda) = 0$$

Preuve : λ est une valeur propre de $A \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)$ non inversible $\Leftrightarrow det(A - \lambda I_n) = 0 \Leftrightarrow P_A(\lambda) = 0$.

Remarque : Nous avons $P_A(0) = det(A)$. D'où :

0 est une valeur propre de A si et seulement si A est non inversible.

Note : En pratique, pour calculer les valeurs propres d'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$, on détermine sa matrice A dans une base quelconque $\mathcal{B}$ de E ($A = M_{\mathcal{B}}(f)$) et on cherche les valeurs propre de A.

Exemple : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ ayant pour matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

1) Déterminer le spectre de f.

2) En déduire que f n'est pas bijectif.

Solution :

Théorème 3.5 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geq 2$. Alors :*

$$P_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} Tr(A)(\lambda)^{n-1} + \cdots + \det(A)$$

- *Le polynôme $P_A(\lambda)$ a ses coefficients dans $\mathbb{K}$ et $deg(P_A) = n$.*

Preuve : Cela résulte de la formule du determinant :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

Cependant, la preuve est loin d'être facile.

Remarque : Le terme de degré 0 dans P_A est $P_A(0) = det(A)$, par définition de P_A.

Exemple : Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ alors :

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - Tr(A)\lambda + \det(A) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc)$$

Corollaire 3.6 *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet au plus n valeurs propres.*

Preuve : Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme P_A. Comme P_A est de degré n, il a au plus n racines. A admet donc au plus n valeurs propres.

Si a est une racine d'un polynôme P, alors P peut être divisible par $(X-a)^2$ ou $(X-a)^3$...

Définition 3.7 *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.*
• *On appelle ordre de multiplicité d'une racine a de P, le plus grand entier m tel que P soit divisible par $(X-a)^m$.*

• *On appelle racine double une racine d'ordre 2, racine triple une racine d'ordre 3, etc.*

Définition 3.8 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ une valeur propre de A.*
• *On appelle ordre de multiplicité de λ, et on note m_λ ou $mult(\lambda)$, l'ordre de multiplicité de λ en tant que zéro du polynôme caractéristique P_A.*

Définition 3.9 (Polynôme scindé)
Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit scindé dans $\mathbb{K}$, si c'est un produit de polynômes de degré 1. Autrement dit, P est scindé dans $\mathbb{K}$ s'il s'écrit sous la forme

$$P(X) = c\prod_{i=1}^{p}(X-a_i)^{m_i}$$

avec :
$a_1, \ldots, a_p$ des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts, appelés racines de P.
$m_1, \ldots, m_p$ des éléments de $\mathbb{N}^*$; m_i est appelé ordre de multiplicité de la racine a_i.
$c \in \mathbb{K}$ une constante.

Remarque :

1) Le degré de P est donc $deg(P) = \sum_{i=1}^{p} m_i$.

2) Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n ($n \geq 1$) est scindé si et seulement si il possède exactement n racines dans $\mathbb{K}$ comptées chacune avec son ordre de multiplicité (c'est-a-dire plus précisément, si la somme des ordres de multiplicité de ses racines est n).

Exemples :

1) $P = X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X-3)$.
P est scindé dans $\mathbb{R}$, car $deg(P) = 2$ et a 2 racines dans $\mathbb{R}$.

2) $P = X^3 - 4X^2 + 5X - 2 = (X-1)^2(X-2) = (X-1)(X-1)(X-2)$.
P est scindé dans $\mathbb{R}$ car $deg(P) = 3$ et a trois racines dans $\mathbb{R}$, comptées chacune avec son ordre de multiplicité $\{1, 1, 2\}$. 1 est une racine double et 2 est une racine simple.

3) $P = X^2 + 1$ n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$. Cependant il est scindé dans $\mathbb{C}$ puisque $P = (X-i)(X+i)$.

Théorème 3.10 (de d'Alembert-Gauss)
Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé dans $\mathbb{C}$.

Preuve : (Admis)

Remarque : Un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ est donc toujours scindé dans $\mathbb{C}$; il est scindé dans $\mathbb{R}$ si toutes ses racines complexes sont réelles (la partie imaginaire est nulle).

Corollaire 3.11 .
• *Si E est un $\mathbb{C}$-e.v. de dimension n alors f admet exactement n valeurs propres, comptées avec leur ordre de multiplicité.*

• *Si E est un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension n alors f admet au plus n valeurs propres, comptées avec leur ordre de multiplicité.*

Preuve : (Admis)

Exemple : Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.
On a $P_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$. Le polynôme $P = X^2 + 1$ n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$. Cependant, il est scindé dans $\mathbb{C}$. On a donc $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$ et $Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{-i, i\}$.

Rappel : La trace de $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est définie par : $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Proposition 3.12 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{K}$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres (non nécessairement distinctes). Alors*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = tr(A), \qquad \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = det(A)$$

Preuve : Nous avons :

$$P_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} Tr(A)(\lambda)^{n-1} + \cdots + \det(A)$$

Comme P_A est scindé, on peut aussi écrire :

$$P_A(\lambda) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i)$$

En identifiant les termes de degré $n-1$ et 0 dans les deux expressions de $P_A(\lambda)$, on obtient le résultat.
Remarque : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a toujours :

$$tr(A) = \sum_{\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A)} \lambda \quad \text{et} \quad det(A) = \prod_{\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A)} \lambda$$

Autrement dit :

► La trace d'un endomorphisme (ou d'une matrice carrée) est la somme de ses valeurs propres complexes.

► Le déterminant d'un endomorphisme (ou d'une matrice carrée) est le produit de ses valeurs propres complexes.

Théorème 3.13 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in Sp(A)$ de multiplicité m_λ. Alors*

$$1 \leq dim(E_\lambda) \leq m_\lambda$$

Preuve :

Remarque : En pratique,
► pour calculer la dimension de E_λ, on applique le théorème du rang à $A - \lambda I_n$.

$$dim(E_\lambda) = n - rg(A - \lambda I_n)$$

► pour déterminer une base de E_λ, on résout le système linéaire

$$AX = \lambda X$$

Corollaire 3.14 *Si λ est une valeur propre simple de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors* $\dim E_\lambda = 1$.

Preuve : λ est valeur propre simple de $A \Leftrightarrow m_\lambda = 1 \Rightarrow 1 \leq dim(E_\lambda) \leq 1 \Leftrightarrow dim(E_\lambda) = 1$.

4 Diagonalisation

4.1 Diagonalisation d'un endomorphisme

Définition 4.1 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ (ici E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension quelconque).*

- *On dit que f est diagonalisable s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de f.*
- *Diagonaliser f, c'est trouver une telle base.*

Exemple : Reconsidérons l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (x - y/2, -x/2 + y)$$

Montrer que f est diagonalisable.

Solution :

Proposition 4.2 *Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors*

f est diagonalisable si et seulement si, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $M_{\mathcal{B}}(f)$ soit diagonale

Preuve :

4.2 Diagonalisation d'une matrice carrée

Définition 4.3 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

- *On dit que A est diagonalisable s'il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres de A.*
- *Diagonaliser A, c'est trouver une telle base.*

Définition 4.4 (bis) *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
- *On dit que A est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale. Autrement dit, A est diagonalisable $\Leftrightarrow \exists\ D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale et $\exists\ P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible telles que :*

$$A = PDP^{-1}$$

- *Diagonaliser A, c'est trouver D et P.*

Théorème 4.5 (condition suffisante)
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet n valeurs propres distinctes deux à deux alors A est diagonalisable.

Preuve :

Exemple 1 : Une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) à coefficients diagonaux distincts deux à deux est diagonalisable. En effet, si

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1\ n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

alors

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1\ n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n}(a_{ii} - \lambda)$$

P_A admet n racines distinctes deux à deux $\Leftrightarrow A$ admet n valeurs propres distinctes deux à deux $\Rightarrow A$ est diagonalisable dont le spectre est $Sp(A) = \{a_{ii}\}_{i=1}^{n}$.

Exemple 2 : Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la matrice carrée suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Montrer que la matrice A est diagonalisable et la diagonaliser.

Solution :

Remarque : Attention, l'ordre de placement des vecteurs propres dans la matrice P doit respectivement suivre l'ordre de placement des valeurs propres dans la matrice D.

Théorème 4.6 *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à n.*

Preuve :

Théorème 4.7 *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est somme directe des sous-espaces propres de A.*

Preuve :

Remarque Importante : En pratique, on utilise souvent le polynôme caractéristique.

Le théorème suivant est une caractérisation fondamentale de la diagonalisabilité d'une matrice carrée.

Théorème 4.8 (condition nécessaire et suffisante)
Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si

1. *P_A est scindé dans $\mathbb{K}$,*

2. $\forall \lambda \in Sp(A), \quad dim(E_\lambda) = m_\lambda$.

Preuve :

Exemple : La matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est-elle diagonalisable ?

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Solution :

Diagonalisation - Synthèse

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- A admet n valeurs propres distinctes deux à deux $\Rightarrow$ A diagonalisable.
- P_A scindé dans $\mathbb{K}$ et $\forall\ \lambda \in Sp(A),\ dim(E_\lambda) = m_\lambda \Leftrightarrow A$ diagonalisable.
- $\displaystyle\sum_{\lambda \in Sp(A)} dim(E_\lambda) = n \Leftrightarrow A$ diagonalisable.
- $\displaystyle\bigoplus_{\lambda \in Sp(A)} E_\lambda = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \Leftrightarrow A$ diagonalisable.
- P_A non scindé dans $\mathbb{K} \Rightarrow A$ non diagonalisable.
- $\exists\ \lambda \in Sp(A),\ dim(E_\lambda) < m_\lambda \Rightarrow A$ non diagonalisable.

5 Trigonalisation

5.1 Matrice triangulaire

• Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite triangulaire supérieure si elle est de la forme :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1\ n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

L'ensemble des matrices triangulaires supérieures se note $\mathcal{U}_n(\mathbb{K})$ ($\mathcal{U}$ pour upper triangular matrix). On note aussi $\mathcal{T}_{n,s}(\mathbb{K})$.

▶ Soit $A \in \mathcal{U}_n(\mathbb{K})$. Si les coefficients diagonaux de A sont nuls ($a_{ii} = 0$), alors on dit que A est triangulaire supérieure stricte.

• Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite triangulaire inférieure si elle est de la forme :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

L'ensemble des matrices triangulaires inférieures se note $\mathcal{L}_n(\mathbb{K})$ ($\mathcal{L}$ pour lower triangular matrix). On note aussi $\mathcal{T}_{n,i}(\mathbb{K})$.

▶ Soit $A \in \mathcal{L}_n(\mathbb{K})$. Si les coefficients diagonaux de A sont nuls ($a_{ii} = 0$), alors on dit que A est triangulaire inférieure stricte.

• On dit qu'une matrice est triangulaire, si elle est triangulaire supérieure ou triangulaire inférieure.

Proposition 5.1 *Toute matrice triangulaire inférieure est semblable à une matrice triangulaire supérieure.*

Preuve : Notons

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

une matrice carrée d'ordre n. On peut vérifier que $PP = I_n$ et donc $P^{-1} = P$.
Soit $L \in \mathcal{L}_n(\mathbb{K})$, une matrice triangulaire inférieure, avec

$$L = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

On a $PLP^{-1} = PLP = U$, avec

$$U = \begin{bmatrix} a_{nn} & a_{n\ n-1} & \cdots & a_{n1} \\ 0 & a_{n-1\ n-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{21} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{11} \end{bmatrix}$$

qui est une matrice triangulaire supérieure, $U \in \mathcal{U}_n(\mathbb{K})$. La matrice L et la matrice U sont donc semblables.

Remarque Le lien entre la matrice L et la matrice U est le suivant :
si f est un endomorphisme ayant pour matrice L dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, en renvesrant cette base on obtient une nouvelle base $\mathcal{B}' = (e_n, \dots, e_1)$. U n'est rien d'autre que la matrice de f dans cette nouvelle base. C'est-à-dire, si $L = [f(e_1) \ \dots \ f(e_n)]$ alors $U = [f(e_n) \ \dots \ f(e_1)]$

Note : Conformément à l'usage, nous adopterons les matrices triangulaires supérieures dans la suite et, pour simplifier, nous les appellerons matrices triangulaires.

5.2 Trigonalisation

Définition 5.2 .
• *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est trigonalisable, s'il existe une matrice triangulaire $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ semblable à A.*
• *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est trigonalisable, s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ soit triangulaire.*

Théorème 5.3 .
• *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *A est trigonalisable.*
2. *P_A est scindé dans $\mathbb{K}$.*

• *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *f trigonalisable.*
2. *P_f est scindé dans $\mathbb{K}$.*

Preuve :

Remarque : Si A est trigonalisable, alors, les éléments de la diagonale de la matrice triangulaire T semblable à A sont les valeurs propres de A.

Exemple : Trigonaliser dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.

Solution :

Corollaire 5.4 *Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*

Preuve : Tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ est scindé dans $\mathbb{C}$, P_A est donc scindé dans $\mathbb{C} \Rightarrow A$ est trigonalisable.

En pratique : Trigonalisation d'une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$. Si A est trigonalisable mais non diagonalisable, alors on a 3 cas classés comme suit:

Cas 1 : $P_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)^2$, avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$. $Sp(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$.
• Si $dim(E_{\lambda_2}) = 1$ alors A est semblable à une matrice de la forme :

$$T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & a \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \text{ avec } \ a \neq 0$$

Cas 2 : $P_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^3$. $Sp(A) = \{\lambda_1\}$.
• Si $dim(E_{\lambda_1}) = 2$ alors A est semblable à une matrice de la forme :

$$T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & a \\ 0 & \lambda_1 & b \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \text{ avec } \ (a, b) \neq (0, 0)$$

Cas 3 : $P_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^3$. $Sp(A) = \{\lambda_1\}$.
• Si $dim(E_{\lambda_1}) = 1$ alors A est semblable à une matrice de la forme :

$$T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & a & b \\ 0 & \lambda_1 & c \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \text{ avec } \ ac \neq 0$$

Trigonalisation - Synthèse

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

► P_A est scindé dans $\mathbb{K} \Leftrightarrow A$ trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

► $\mathbb{K} = \mathbb{C} \Rightarrow A$ trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

6 Applications de la réduction d'une matrice carrée

6.1 Calcul des puissances d'une matrice

Rappel : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si λ est une valeur propre de A, alors :

- λ^2 est une valeur propre de A^2, et plus généralement
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lambda^k \text{ est une valeur propre de } A^k$$
- si A est inversible alors $1/\lambda$ est une valeur propre de A^{-1}, et plus généralement
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lambda^{-k} \text{ est une valeur propre de } A^{-k}$$

6.1.1 Puissances d'une matrice

Définition 6.1 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $k \in \mathbb{N}$. On appelle puissance k-ième de A et on note A^k, la matrice définie par*
$$A^k = \underbrace{A \times \ldots \times A}_{k \ fois}$$
où par convention
$$A^0 = I_n$$
- *Si A est inversible d'inverse A^{-1}, alors A^{-k} est défini par*
$$A^{-k} = (A^{-1})^k$$

Remarque : On peut avoir $A^k = O_n$ alors que $A \neq O_n$. Par exemple
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{mais} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Propriétés 6.2 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

- *$\forall\ i, k \in \mathbb{N}$:*
$$A^i \times A^k = A^{i+k} \quad et \quad (A^i)^k = A^{ik}$$
- *Si A est inversible, alors $\forall\ i, k \in \mathbb{Z}$:*
$$A^i \times A^k = A^{i+k} \quad et \quad (A^i)^k = A^{ik}$$

Preuve :

Proposition 6.3 *Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale ; $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure et $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire inférieure. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de ces trois matrices, i.e. :*
$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \ ; \ U = \begin{bmatrix} \lambda_1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & u_{n-1\ n} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \ ; \ L = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & \cdots & l_{nn-1} & \lambda_n \end{bmatrix}$$
Alors $\forall k \in \mathbb{N}$:
$$D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n^k \end{bmatrix} \ ; \ U^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n^k \end{bmatrix} \ ; \ L^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & (0) \\ & \ddots & \\ (*) & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$
où $(*)$ sont des éléments de $\mathbb{K}$.

Preuve :

6.1.2 Formule du binôme

Définition 6.4 *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite nilpotente, s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que*

$$A^p = O_n \quad \text{et} \quad A^{p-1} \neq O_n$$

L'entier p est unique et s'appelle l'ordre de nilpotence de la matrice A.

Exemples :

1) La matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ est nilpotente, d'ordre de nilpotence 2.

2) La matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ est nilpotente, d'ordre de nilpotence 3.

Remarque : Plus généralement, on peut montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure stricte ou triangulaire inférieure stricte est nilpotente, d'ordre de nilpotence $\leq n$.

Théorème 6.5 (Formule du binôme)
Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A et B commutent ($AB = BA$) alors $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$(A+B)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} A^{k-i} B^i$$

Preuve :

Remarque : Cette formule est fausse si A et B ne commutent pas.

Exercice : Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$, des matrices suivantes :

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad b)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \quad ;$$

Solution :

Exercice : Calculer T^k pour tout $k \in \mathbb{N}$, de la matrice suivante :

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Solution :

6.1.3 Puissances de matrices semblables

Proposition 6.6 *Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible telles que*

$$A = PBP^{-1}$$

Alors

$$\forall\ k \in \mathbb{N} \quad A^k = PB^kP^{-1}$$

Preuve : (Par récurrence)

• **Initialisation** : Si $k = 0$ la propriété est vraie car $A^0 = I_n = PI_nP^{-1} = PB^0P^{-1}$.

• **Hérédité** : Supposons que la propriété est vraie jusqu'au rang k, $(k \in \mathbb{N})$ i.e. : $A^k = PB^kP^{-1}$.
On a alors
$A^{k+1} = A^kA = PB^kP^{-1}PBP^{-1} = PB^k(P^{-1}P)BP^{-1} = P(B^kB)P^{-1} = PB^{k+1}P^{-1}$.
Ce qui prouve la propriété au rang $k+1$.

Remarque : Soit $A = PBP^{-1}$. A est inversible $\Leftrightarrow$ B est inversible et on a :

$$A^{-1} = PB^{-1}P^{-1}$$

En effet : $A^{-1} = (PBP^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1}B^{-1}P = PB^{-1}P^{-1}$

Corollaire 6.7 *Soit $A, B, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversibles telles que*

$$A = PBP^{-1}$$

Alors

$$\forall\ k \in \mathbb{Z} \quad A^k = PB^kP^{-1}$$

Preuve :

• Nous avons $\forall\ k \in \mathbb{N} \quad A^k = PB^kP^{-1}$

• Soit $k \in \mathbb{Z}^{*-} \Leftrightarrow m = -k \in \mathbb{N}^*$
$A^k = A^{-m} = (A^{-1})^m = (PB^{-1}P^{-1})^m = P(B^{-1})^mP^{-1} = PB^{-m}P^{-1} = PB^kP^{-1}$. Et ainsi

$$\forall\ k \in \mathbb{Z} \quad A^k = PB^kP^{-1}$$

A) Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable

Corollaire 6.8 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale telles que*

$$A = PDP^{-1}$$

Alors

$$\forall\ k \in \mathbb{N} \quad A^k = PD^kP^{-1}$$

Si A est inversible alors

$$\forall\ k \in \mathbb{Z} \quad A^k = PD^kP^{-1}$$

Preuve :

Remarque :

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

Par conséquent

$$A^k = P \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n^k \end{bmatrix} P^{-1}$$

Exemple : Soit

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -8 & 6 \\ -1 & -8 & 7 \\ 1 & -14 & 11 \end{bmatrix}$$

Montrer que A est inversible et calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Solution :

B) Calcul des puissances d'une matrice trigonalisable

Corollaire 6.9 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire telles que*

$$A = PTP^{-1}$$

Alors

$$\forall\ k \in \mathbb{N} \quad A^k = PT^kP^{-1}$$

Si A est inversible alors

$$\forall\ k \in \mathbb{Z} \quad A^k = PT^kP^{-1}$$

Preuve :

C) Calcul des puissances d'une matrice diagonale par blocs

Proposition 6.10 (puissance de matrice diagonale par blocs)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale par blocs, i.e. de la forme :

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{bmatrix}$$

où les A_i sont des matrices carrés. Alors $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$A^k = \begin{bmatrix} A_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_p^k \end{bmatrix}$$

Preuve :

Corollaire 6.11 *Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaires supérieure de la forme :*

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & T_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & T_p \end{bmatrix}$$

où les T_i sont des matrices triangulaires supérieure. Alors $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$T^k = \begin{bmatrix} T_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & T_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & T_p^k \end{bmatrix}$$

Preuve.

Exemple.

Solution.

6.2 Suites récurrentes linéaires

Rappel. Suite numérique arithmético-géométrique

Définition 6.12 *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ est dite arithmético-géométrique, s'il existe $(a,b)\in\mathbb{K}$ tels que la suite vérifie la relation de récurrence suivante :*

$$\forall n\in\mathbb{N}\ ,\quad u_{n+1}=au_n+b$$

Cas $a=1$: La suite est arithmétique, donc

$$\forall n\in\mathbb{N}\ ,\quad u_n=u_0+nb$$

- Si $b\neq 0$, alors la suite est divergente.
- Si $b=0$, la suite est constante : $\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ u_n=u_0$.

Cas $a\neq 1$: Le terme général de la suite est donné par :

$$\forall n\in\mathbb{N}\ ,\quad u_n=a^n(u_0-u)+u \ \text{ avec }\ u=\frac{b}{1-a}$$

Si $|a|<1$, la suite est convergente $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u$.

6.2.1 Suites récurrentes linéaires du premier ordre

Proposition 6.13 *Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par*

$$X_{n+1}=AX_n+B \quad \text{où} \quad X_0 \text{ est donnée}$$

Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente,alors sa limite X est solution de

$$X=AX+B$$

Preuve :

Proposition 6.14 *Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.*

1) Si I_n-A est inversible alors, pour tout B, il existe une seule matrice $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ solution de

$$X=AX+B$$

2) Si I_n-A n'est pas inversible alors, deux cas sont possibles

- *soit il n'existe aucune matrice $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ solution de*

$$X=AX+B$$

- *soit il existe une infinité de matrices $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ solution de*

$$X=AX+B$$

Preuve :

Exemple. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles définies par $u_0=0$, $v_0=22$, $w_0=22$ et

$$\forall n\in\mathbb{N}\left\{\begin{array}{l} u_{n+1}=\frac{1}{4}\left(2u_n+v_n+w_n\right)\\ v_{n+1}=\frac{1}{3}\left(u_n+v_n+w_n\right)\\ w_{n+1}=\frac{1}{4}\left(u_n+v_n+2w_n\right)\end{array}\right. \qquad (S)$$

Calculer u_n, v_n, w_n en fonction de n et étudier la convergence de ces trois suites.

Solution.