Forme bilinéaire

Khalid El Amine I.
Department of Mathematics and Finance

★★★

Notations et conventions :

• $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

• E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1 Forme

Définition 1.1 (Forme)
Soit V un $\mathbb{K}$-ev. On appelle forme sur V toute application φ de V dans $\mathbb{K}$. i.e. :

$$\varphi : V \longrightarrow \mathbb{K}$$

Remarque.

• En général, on appelle forme, toute application d'un espace vectoriel dans son corps de base.

• En analyse, une application d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V à valeurs dans $\mathbb{R}$ est appelée fonctionnelle. L'espace sous-jacent V est souvent un espace de fonctions.

Définition 1.2 (Forme symétrique et antisymétrique)
Soit V un $\mathbb{K}$-ev. Soit $\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme. On dit que :

- *φ est symétrique si*
$$\forall\ x, y \in V \qquad \varphi(x,y) = \varphi(y,x)$$
- *φ est antisymétrique si*
$$\forall\ x, y \in V \qquad \varphi(x,y) = -\varphi(y,x)$$

Exemple. Soit φ la forme sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ définie pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ par

$$\varphi(x,y) = x_1 y_2 + x_2 y_1$$

Montrer que φ est symétrique.

Solution. $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\forall y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\varphi(x,y) = x_1 y_2 + x_2 y_1 = y_1 x_2 + y_2 x_1 = \varphi(y,x)$$

φ est bien symétrique.

Exemple. Soit φ la forme sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ définie pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ par

$$\varphi(x,y) = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

Montrer que φ est antisymétrique.

Solution. $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\forall y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\varphi(x,y) = x_1 y_2 - x_2 y_1 = y_2 x_1 - y_1 x_2 = -(y_1 x_2 - y_2 x_1) = -\varphi(y,x)$$

φ est bien antisymétrique.

2 Forme linéaire

2.1 Définition

Définition 2.1 (Forme linéaire)
Soit V un $\mathbb{K}$-ev. On appelle forme linéaire sur V toute application linéaire φ de V dans $\mathbb{K}$, i.e.

$$\varphi \in \mathcal{L}(V, \mathbb{K})$$

Exemple. Soit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ fixés. Soit φ l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\varphi(x) = a_1x_1 + a_2x_2, \quad \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

Montrer que φ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$.

Solution.

(1) $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $a_1x_1 + a_2x_2 \in \mathbb{R}$, car somme finie de nombres réels.
D'où $\forall x \in \mathbb{R}^2$, $\varphi(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow \varphi$ est une forme sur $\mathbb{R}^2$.

(2) $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\forall x' = (x'_1, x'_2) \in \mathbb{R}^2$; $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ et $\forall \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha x + \beta x') &= \varphi(\alpha(x_1, x_2) + \beta(x'_1, x'_2)) \\ &= \varphi((\alpha x_1 + \beta x'_1, \alpha x_2 + \beta x'_2)) \\ &= a_1(\alpha x_1 + \beta x'_1) + a_2(\alpha x_2 + \beta x'_2) \\ &= \alpha(a_1x_1 + a_2x_2) + \beta(a_1x'_1 + a_2x'_2) \\ &= \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(x')\end{aligned}$$

Ainsi φ est linéaire.
Par (1) et (2), on conclut que φ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Avec $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ fixés. Toute forme linéaire φ sur $\mathbb{R}^n$ s'écrit :

$$\varphi(x) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n, \quad \forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

• $[a_1 \ldots a_n]$ est la matrice de φ relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}$.

Exercice. Soit φ l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$\varphi(A) = tr(A), \quad \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Montrer que φ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution.

(1) $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-ev.

(2) $\forall A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \Rightarrow \varphi(A) \in \mathbb{R}$ car il s'agit d'une somme finie de nombres réels. φ est donc une forme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(3) $\forall A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\forall B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ et $\forall \beta \in \mathbb{R}$

$$\alpha A + \beta B = [\alpha a_{ij} + \beta b_{ij}]$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha A + \beta B) = tr(\alpha A + \beta B) &= \sum_{i=1}^{n}(\alpha a_{ii} + \beta b_{ii}) = \alpha\sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \beta\sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \alpha\, tr(A) + \beta\, tr(B) \\ &= \alpha\varphi(A) + \beta\varphi(B)\end{aligned}$$

L'application *trace* est donc une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2.2 Hyperplan

Définition 2.2 (Hyperplan)
Soit V un $\mathbb{K}$-ev. On appelle hyperplan de V, le noyau d'une forme linéaire non nulle sur V.

Exemple. Soit φ la forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\varphi(x) = x_1 + x_2 \quad \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

Déterminer H l'hyperplan de $\mathbb{R}^2$ associé à la forme linéaire φ.

Solution. φ est non nulle. $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$x \in H \Leftrightarrow x \in ker(\varphi) \Leftrightarrow \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -x_2 \Leftrightarrow x = (-x_2, x2) = x_2(-1, 1)$$

Ainsi $H = Vect\{(-1, 1)\}$.

Remarque. Un hyperplan de V est un s.e.v. de V, car c'est le noyau d'une application linéaire.

Théorème 2.3 *Soit V un $\mathbb{K}$-ev et H un s.e.v. de V. Alors*
H est un hyperplan de V, si et seulement si, il existe une droite vectorielle D de V telle que : $V = H \oplus D$

Preuve.

Corollaire 2.4 *Soit V un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, $(n \geq 1)$ et H un s.e.v. de V. Alors*
H est un hyperplan de V, si et seulement si, H est de dimension $n - 1$

Preuve.

3 Forme bilinéaire

3.1 Cas d'un espace vectoriel de dimension quelconque

Dans cette sous-section : E est un $\mathbb{R}$-ev de dimension quelconque.

3.1.1 Forme bilinéaire

Définition 3.1 (Forme bilinéaire)
On appelle forme bilinéaire sur E toute application $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

1) φ est linéaire par rapport à la première place (ou au premier argument) :

$$\forall\ x, x', y \in E \quad et \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \qquad \varphi(\alpha x + \beta x', y) = \alpha\varphi(x, y) + \beta\varphi(x', y)$$

2) φ est linéaire par rapport à la deuxième place (ou au deuxième argument) :

$$\forall\ x, y, y' \in E \quad et \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \qquad \varphi(x, \alpha y + \beta y') = \alpha\varphi(x, y) + \beta\varphi(x, y')$$

- *On notera $\mathcal{L}_2(E \times E;\ \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des formes bilinéaires sur E.*
- *On abrègera souvent forme bilinéaire en : f.b.*

Remarque. Attention $\mathcal{L}_2(E \times E;\ \mathbb{R}) \neq \mathcal{L}(E \times E;\ \mathbb{R})$.

Exemple. Donner un contre exemple pour illustrer cette remarque.

Solution.

Propriété 3.2 *Si φ est une forme bilinéaire sur E, alors $\forall x \in E$:*

$$\varphi(x, 0_E) = \varphi(0_E, x) = 0$$

Preuve. $\forall x \in E$:

- $\varphi(x, 0_E) = \varphi(x, 0_E + 0_E) = \varphi(x, 0_E) + \varphi(x, 0_E)$, par linéarité à droite. Ainsi

$$\varphi(x, 0_E) = 2\varphi(x, 0_E)$$

Comme $\varphi(x, 0_E) \in \mathbb{R}$, car φ est une forme, on a nécessairement $\varphi(x, 0_E) = 0$.

- $\varphi(0_E, x) = 0$ se démontre de la même manière, en utilisant la linéarité à gauche de φ.

Proposition 3.3 *Soit φ une forme bilinéaire sur E.*
$\forall p, q \in \mathbb{N}^*$ $\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ et $\forall \beta_1, \ldots, \beta_q \in \mathbb{R}$; $\forall x_1, \ldots, x_p \in E$ et $\forall y_1, \ldots, y_q \in E$

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^{q} \beta_j y_j\right) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} \alpha_i \beta_j \varphi(x_i, y_j)$$

Preuve.

3.1.2 Forme bilinéaire symétrique/antisymétrique

Proposition 3.4 (Forme bilinéaire symétrique)
Pour qu'une forme $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ soit une forme bilinéaire symétrique, il faut et il suffit que l'on ait :

(1) φ est symétrique.

(2) φ est linéaire par rapport à la première place.

- *On notera $\mathcal{L}_{2,s}(E \times E;\ \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des formes bilinéaires symétrique sur E.*
- *On abrègera souvent forme bilinéaire symétrique en : f.b.s.*

Preuve. Simple vérification.

Exemple. La forme $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $\varphi(x, y) = xy$ est une f.b.s. sur $\mathbb{R}$.

1) Symétrie : $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\varphi(x, y) = xy = yx = \varphi(y, x)$$

2) Bilinéarité : $\forall x, x', y \in \mathbb{R}$ et $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\varphi(\alpha x + \beta x', y) = (\alpha x + \beta x')y = \alpha xy + \beta x'y = \alpha\varphi(x, y) + \beta\varphi(x', y)$$

φ est donc linéaire par rapport au premier argument et, par symétrie, elle est linéaire par rapport au deuxième argument. φ est donc bilinéaire.

φ est bien une $f.b.s.$

Proposition 3.5 (Forme bilinéaire antisymétrique)
Pour qu'une forme $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ soit une forme bilinéaire antisymétrique, il faut et il suffit que l'on ait :

(1) φ est antisymétrique.

(2) φ est linéaire par rapport à la première place.

- *On notera $\mathcal{L}_{2,a}(E \times E;\ \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des formes bilinéaires antisymétrique sur E.*
- *On abrègera souvent forme bilinéaire antisymétrique en : f.b.a.*

Preuve. Simple vérification.

Exercice. Montrer que l'application déterminant sur $\mathbb{R}^2$ est une forme bilinéaire antisymétrique.

Solution.

Proposition 3.6 *Les deux s.e.v. $\mathcal{L}_{2,s}(E \times E;\ \mathbb{R})$ et $\mathcal{L}_{2,a}(E \times E;\ \mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{L}_2(E \times E;\ \mathbb{R})$, i.e :*

$$\mathcal{L}_{2,s}(E \times E;\ \mathbb{R}) \oplus \mathcal{L}_{2,a}(E \times E;\ \mathbb{R}) = \mathcal{L}_2(E \times E;\ \mathbb{R})$$

Preuve.

3.1.3 Forme bilinéaire symétrique positive/définie

Définition 3.7 (f.b.s. positive)
Une forme bilinéaire symétrique $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite positive si :

$$\forall\ x \in E \qquad \varphi(x, x) \geq 0$$

Définition 3.8 (f.b.s. définie)
Une forme bilinéaire symétrique $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite définie si :

$$\forall\ x \in E \qquad \varphi(x, x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0_E$$

Définition 3.9 (f.b.s. positive définie)
Une forme bilinéaire symétrique $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite positive définie si elle est positive et elle est définie, i.e. :

$$\forall x \in E \backslash \{0_E\} \qquad \varphi(x, x) > 0$$

Exemple. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\forall y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\varphi(x, y) = x_1 y_1 - x_2 y_2$$

Montrer que φ est une $f.b.s.$ sur $\mathbb{R}^2$. Est-elle positive ? définie ?

Solution.

3.2 Cas d'un espace vectoriel de dimension finie

Dans cette sous-section : $n \in \mathbb{N}^*$ et E est un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie avec $dim(E) = n$.

3.2.1 Matrice d'une forme bilinéaire

On suppose que $dim(E) = n$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Pour $x \in E$, on note
$X = M_{\mathcal{B}}(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ le vecteur colonne des composantes de x dans la base $\mathcal{B}$.

Définition 3.10 *Soit φ une f.b. sur E et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. On appelle matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$, la matrice carrée d'ordre n :*

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = [\varphi(e_i, e_j)]_{1 \le i,j \le n} = \begin{bmatrix} \varphi(e_1, e_1) & \dots & \varphi(e_1, e_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(e_n, e_1) & \dots & \varphi(e_n, e_n) \end{bmatrix}$$

Exemple. Soit $E = \mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$. Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, et

$$\begin{array}{llll} \varphi : & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) & \longmapsto & ax_1y_1 + bx_1y_2 + cx_2y_1 + dx_2y_2 \end{array}$$

Il est clair que φ est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$ et on a :

$$M_B(\varphi) = \begin{bmatrix} \varphi(e_1, e_1) & \varphi(e_1, e_2) \\ \varphi(e_2, e_1) & \varphi(e_2, e_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Proposition 3.11 *Soit φ une f.b. sur E, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$. Alors*

$$\forall\ x, y \in E \qquad \varphi(x, y) = X^T AY$$

où $X = M_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = M_{\mathcal{B}}(y)$.

Preuve.

Remarque. Réciproquement, toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définit une forme bilinéaire sur E *via* la formule :

$$\varphi(x, y) = X^T AY$$

Précisément, on a la proposition

Proposition 3.12 *Soit $\mathcal{B}$ une base de E. L'application*

$$\begin{array}{llll} M_{\mathcal{B}} : & \mathcal{L}_2(E \times E;\ \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & \varphi & \longmapsto & M_{\mathcal{B}}(\varphi) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Preuve.

Remarque. Soit φ une application définie sur $E \times E$. Alors

$$\varphi \text{ est une } f.b. \text{ sur } E \iff \exists A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } \forall x, y \in E,\ \varphi(x, y) = X^T AY.$$

Donc, en particulier :

$$\varphi \text{ est une } f.b. \text{ sur } \mathbb{R}^n \iff \exists (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathbb{R}^{n^2} \text{ tels que } \forall x, y \in \mathbb{R}^n\ \varphi(x, y) = \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij} x_i y_j$$

Exemple. Soit $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.
Définir la *f.b.* φ ayant pour matrice A dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$.

Solution. Soit $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Notons $X = M_B(x)$ et $Y = M_B(y)$. On a

$$\begin{aligned}\varphi(x,y) = X^T AY = [x_1 \; x_2] \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= [x_1 \; x_2] \begin{bmatrix} -y_1 + 3y_2 \\ 2y_1 + 5y_2 \end{bmatrix} \\ &= -x_1y_1 + 3x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2\end{aligned}$$

Proposition 3.13 (Changement de base)
Soit φ une f.b. sur E, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $P = P_{(\mathcal{B},\mathcal{B}')}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
Si $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ et $A' = M_{\mathcal{B}'}(\varphi)$ alors :

$$A' = P^T AP$$

Preuve. Pour $x \in E$ on note $X = M_{\mathcal{B}}(x)$ et $X' = M_{\mathcal{B}'}(x)$. On sait que $X = PX'$.
Pour tout $x, y \in E$ on a :

$$\varphi(x,y) = X^T AY = (PX')^T A(PY') = (X')^T (P^T AP)Y'$$

ce qui signifie exactement que $A' = P^T AP$ du fait de l'unicité de la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}'$.

Exemple. Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, la matrice d'une *f.b.* φ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$. Soit $\mathcal{B}' = (v_1, v_2)$ avec $v_1 = (1, 1)$ et $v_2 = (-1, 1)$. Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}'$.

Solution. Notons P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. On a $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
La matrice A' de φ dans la base $\mathcal{B}'$ est donc

$$\begin{aligned}A' = P^T AP &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Définition 3.14 *Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite congrue à une matrice M' de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, s'il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telles que :*

$$M' = P^T MP$$

Remarque. Cette définition indique que deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont congrues si elles représentent la même forme bilinéaire dans deux bases différentes.

3.2.2 Matrice d'une forme bilinéaire symétrique/antisymétrique

Proposition 3.15 *Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie. Soit φ une forme bilinéaire sur E.*
Dans n'importe quelle base de E :

- *φ est symétrique si et seulement si sa matrice est symétrique.*
- *φ est antisymétrique si et seulement si sa matrice est antisymétrique.*

Preuve.

Exercice.

1) Construire une forme bilinéaire symétrique φ sur $\mathbb{R}^2$.
2) Construire une forme bilinéaire antisymétrique ψ sur $\mathbb{R}^2$.

Solution.

1) Une *f.b.* φ est symétrique **ssi** sa matrice (dans une base quelconque) est symétrique.
Exemple : $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ est symétrique. Cela nous permet de construire une *f.b.s.* sur $\mathbb{R}^2$.

$$\varphi(x, y) = X^T AY = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$$

2) Une *f.b.* ψ est antisymétrique **ssi** sa matrice (dans une base quelconque) est antisymétrique.
Exemple : $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ est antisymétrique. Cela nous permet de construire une *f.b.* antisymétrique sur $\mathbb{R}^2$.

$$\psi(x, y) = X^T AY = x_1y_2 - x_2y_1$$

Notation : On note :

- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le s.e.v. (de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) des matrices symétriques.
- $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ le s.e.v. (de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) des matrices antisymétriques.

Proposition 3.16 *Les deux s.e.v. $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, i.e. :*

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

De plus, les dimensions des $\mathbb{R}$-ev $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont :

$$dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2} \quad et \quad dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}$$

Preuve.

Corollaire 3.17 *Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie n. Alors*

- *$\mathcal{L}_{2,s}(E \times E;\ \mathbb{R})$ est isomorphe à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$*
- *$\mathcal{L}_{2,a}(E \times E;\ \mathbb{R})$ est isomorphe à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$*

et donc

$$dim(\mathcal{L}_{2,s}(E \times E;\ \mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2} \quad et \quad dim(\mathcal{L}_{2,s}(E \times E;\ \mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}$$

Preuve.

3.3 Matrice d'une forme bilinéaire symétrique positive/définie

Définition 3.18 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique.*

- *On dit que la matrice symétrique A est positive, si*

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \ , \quad X^T AX \geq 0$$

- *On dit que la matrice symétrique A est définie, si*

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \ , \quad X^T AX = 0 \ \Leftrightarrow \ X = 0$$

Remarque. Une matrice symétrique A est positive définie si : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{O_{n,1}\}$, $X^T AX > 0$.

Définition 3.19 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle sous-matrice principale de A d'ordre k, la matrice*

$$A_k = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix} ,1 \ \leq k \leq n$$

Théorème 3.20 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

1) *A est positive définie.*
2) *Les déterminants des n sous-matrices principales de A sont strictement positifs.*
3) *Toutes les valeurs propres (dans $\mathbb{C}$) de A sont réelles et strictement positives.*

Preuve.

Remarque. Si A est une matrice symétrique positive définie, alors elle est inversible.

Théorème 3.21 *Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie, φ une forme bilinéaire sur E et A la matrice de φ (dans une base quelconque). Alors*

φ est symétrique positive définie, si et seulement si, A est symétrique positive définie.

Preuve.