Espace Préhilbertien Réel

Khalid El Amine I.
Department of Mathematics and Finance

★★★

Notations et conventions :

- $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.
- E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1 Produit scalaire

1.1 Définition

Définition 1.1 (Produit scalaire)
On appelle produit scalaire sur E, toute forme bilinéaire symétrique positive définie sur E.

- *On abrègera souvent produit scalaire en p.s.*

Notation. Si φ est un p.s. sur E, alors on note souvent $\varphi(x, y)$ par,

$$\langle x, y\rangle \text{ ou } (x \,|\, y) \text{ ou } x.y$$

Remarque. Un p.s. sur E induit naturellement un p.s. sur tout s.e.v. de E.

Exemple. $\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \forall y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

Montrer que $\langle . , . \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Solution. $\forall x, x', y \in \mathbb{R}^n$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

(1) $\langle x, y\rangle = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \in \mathbb{R}$ (car somme finie de réels).
$\langle . , . \rangle$ est donc une forme sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ (car bien définie sur cet e.v. et à valeurs dans $\mathbb{R}$).

(2) $\langle x, y\rangle = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \sum_{k=1}^{n} y_k x_k = \langle y, x\rangle$. $\langle . , . \rangle$ est donc symétrique.

(3) $\langle \alpha x + x', y\rangle = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\alpha x_k + x'_k) y_k = \alpha \sum_{k=1}^{n} x_k y_k + \sum_{k=1}^{n} x'_k y_k = \alpha\langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle$.
$\langle . , . \rangle$ est donc linéaire à gauche. Par symétrie, $\langle . , . \rangle$ est linéaire à droite. $\langle . , . \rangle$ est alors bilinéaire.

(4) $\langle x, x\rangle = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \geq 0$ (car somme de réels tous positifs). $\langle . , . \rangle$ est donc positive.

(5) $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 0 \Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!],\ x_k = 0 \Leftrightarrow x = (0, \ldots, 0)$. $\langle .\,, .\rangle$ est donc définie.

Conclusion. $\langle .\,, .\rangle$ est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. Il est appelé produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

Remarque. On peut aussi utiliser la formulation matricielle.

La matrice de la *f.b.* $\langle .\,, .\rangle$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est I_n, qui est symétrique positive définie, par conséquent $\langle .\,, .\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

1.2 Exemples fondamentaux de produit scalaire

- Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$: $\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \forall y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

- Produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: $\forall X = [x_k] \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \forall Y = [y_k] \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$$\langle X, Y\rangle = X^T Y = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

- Produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$: $\forall A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \quad \forall B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

$$\langle A, B\rangle = tr(A^T B) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$$

- Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}_n[X]$: $\forall P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X], \quad \forall Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$

$$\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$$

- Produit scalaire canonique sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$: $\forall f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\ dt$$

1.3 Inégalité de Schwarz

Théorème 1.2 (Inégalité de Schwarz)
Soit $\langle .\,, .\rangle$ un produit scalaire sur E. Pour tout $x, y \in E$

- $$\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$
- $\langle x, y\rangle^2 = \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$ *si et seulement si x et y sont liés.*

Remarque. Par passage à la racine, l'inégalité de Schwarz s'écrit aussi

$$|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}$$

Preuve.

Exemples.

• Sur $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, l'inégalité de SCHWARZ prend la forme :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right) \qquad \forall x, y \in E$$

• Sur $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique, l'inégalité de SCHWARZ prend la forme :

$$\left(tr(A^T B)\right)^2 \leq tr(A^T A) tr(B^T B) \qquad \forall A, B \in E$$

• Sur $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique, l'inégalité de SCHWARZ prend la forme :

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(t)\,dt\right)\left(\int_a^b g^2(t)\,dt\right) \qquad \forall f, g \in E$$

Théorème 1.3 (Inégalité de MINKOWSKI)
Soit $\langle .,. \rangle$ un produit scalaire sur E. Pour tout $x, y \in E$

•
$$\sqrt{\langle x+y, x+y \rangle} \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

• $\sqrt{\langle x+y, x+y \rangle} = \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle}$ *si et seulement si x et y sont positivement liés.*

Rappel. x et y sont positivement liés $\iff \exists \lambda \geq 0 : \; x = \lambda y$ ou $y = \lambda x \iff (x = 0)$ ou $(y = 0)$ ou $(x \neq 0$ et $y \neq 0$ et $\exists \lambda > 0 : y = \lambda x)$.

Preuve.

1.4 Norme associée à un produit scalaire

Rappelons la définition d'une norme sur un espace vectoriel.

Définition 1.4 (Norme)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle norme sur E, toute fonction $N : E \to \mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

(1) $\forall x \in E, \quad N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$ *(Séparation)*

(2) $\forall x \in E$ *et* $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ *(Homogénéité)*

(3) $\forall (x,y) \in E^2, \quad N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ *(Inégalité triangulaire)*

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E muni d'une norme N est appelé espace vectoriel normé. Il est noté (E, N).

Théorème 1.5 *Si $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire sur E, alors l'application $\|.\| : E \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \;, \quad \forall x \in E$$

est une norme sur E. $\|.\|$ est appelée norme associée au produit scalaire $\langle .,. \rangle$.

Preuve.

1.5 Exemples de normes associées au produit scalaire

- Dans $\mathbb{R}^n$, la norme associée au produit scalaire canonique est : $\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2}$$

- Dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la norme associée au produit scalaire canonique est : $\forall A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

$$\|A\| = \left(tr(A^T A)\right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{1/2}$$

- Dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, la norme associée au produit scalaire canonique est : $\forall f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$

$$\|f\| = \left(\int_a^b (f(t))^2\, dt\right)^{1/2}$$

2 Espace Préhilbertien Réel

2.1 Définition

Définition 2.1 (Espace préhilbertien)
On appelle espace préhilbertien réel, un $\mathbb{R}$-ev E muni d'un produit scalaire. On le note $(E, \langle .,. \rangle)$.

- *On abrègera parfois espace préhilbertien réel en : e.p.r.*

Définition 2.2 (Espace euclidien)
On appelle espace euclidien, un espace préhilbertien réel de dimension finie.

2.2 Inégalités et Identités

Convention. La norme associée à un produit scalaire sera appelée norme préhilbertienne ou norme euclidienne si $dim(E) < \infty$.

En utilisant la définition de la norme associée à un produit scalaire, i.e.

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

on reformule le théorème de Schwarz et le théorème de Minkowski.

Théorème 2.3 (Inégalité de Schwarz)
Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Pour tout $x, y \in E$

-
$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

- $|\langle x, y\rangle| = \|x\|\|y\|$ *si et seulement si x et y sont liés.*

Théorème 2.4 (Inégalité de Minkowski)
Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Pour tout $x, y \in E$

-
$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

- $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ *si et seulement si x et y sont positivement liés. (i.e. $\exists \lambda \geq 0 : x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$)*

Proposition 2.5 (Identités remarquables)
Soit $(E, \langle .\,,.\rangle)$ un espace préhilbertien réel. Pour tout $x, y \in E$:

- $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$
- $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$

Preuve.

- $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$
- $\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \langle x, x\rangle - 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle = \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$

Proposition 2.6 (Identité du parallélogramme)
Soit $(E, \langle .\,,.\rangle)$ un espace préhilbertien réel. Pour tout $x, y \in E$:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Preuve. Par addition des identités remarquables ci-dessus.

Interprétation. Dans un parallélogramme, la somme des carrés des diagonales est égale à 2 fois la somme des carrés des cotés. (faire un dessin)

Remarque Importante. Toute norme vérifiant l'identité du parallélogramme est préhilbertienne.

Cette identité permet donc de vérifier si une norme est associée à un produit scalaire ou pas.

Proposition 2.7 (Identités de polarisation)
Soit $(E, \langle .\,,.\rangle)$ un espace préhilbertien réel. Pour tout $x, y \in E$:

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)\end{aligned}$$

Preuve. A partir des identités remarquables.

Remarque. L'identité de polarisation (une des 2) permet de reconstituer l'expression d'un produit scalaire connaissant la norme préhilbertienne associée.

Note.

1) Si E est un e.p.r. alors E est un e.v.n. ; puisqu'à un p.s. on peut toujours associer une norme.
2) "Réciproquement", si E est un e.v.n. et si sa norme vérifie l'identité du parallélogramme, alors E est un e.p.r., dont le p.s. est obtenu par l'une des identités de polarisation.

3 Orthogonalité

3.1 Définition-Généralités

Définition 3.1 (Vecteurs orthogonaux)
Soit $(E, \langle .\,,.\rangle)$ un espace préhilbertien réel.
On dit que deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux, et on note $x \perp y$, si :

$$\langle x, y\rangle = 0$$

Remarque. Donc par symétrie :

x et y sont orthogonaux équivaut à x est orthogonal à y équivaut à y est orthogonal à x.

Remarque. La notion d'orthogonalité est relative au produit scalaire choisi sur E.
Deux vecteurs peuvent être orthogonaux pour un produit scalaire mais pas pour un autre.

Définition 3.2 *Soit $(E, \langle .\, , . \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Un vecteur $x \in E$ est dit isotrope s'il est orthogonal à lui même. i.e. :*

$$\langle x, x \rangle = 0$$

Propriétés 3.3 *Soit $(E, \langle .\, , . \rangle)$ un espace préhilbertien réel.*

- *Le vecteur nul est orthogonal à tous les autres vecteurs de E.*
- *Le vecteur nul est le seul vecteur isotrope de E.*

Preuve.

Définition 3.4 (Orthogonal à une partie de E)
Soit $(E, \langle .\, , . \rangle)$ un espace préhilbertien réel.

- *Soit $A \subset E$ et $x \in E$. On dit que x est orthogonal à A, et on note $x \perp A$, si :*

$$\forall y \in A, \quad \langle x, y \rangle = 0$$

- *Soit $A, B \subset E$. On dit que A et B sont orthogonales, et on note $A \perp B$, si :*

$$\forall x \in A \quad et \quad \forall y \in B\ , \quad \langle x, y \rangle = 0$$

Proposition 3.5 *Soit $(E, \langle .\, , . \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Si F est un s.e.v. de E tel que*

$$F = Vect(v_1, \ldots, v_p)$$

alors, $\forall x \in E$

$$x \perp F \quad \Leftrightarrow \quad x \perp v_i \quad \forall i \in [\![1, p]\!]$$

Preuve.

Proposition 3.6 *Soit $(E, \langle .\, , . \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Si F et G deux s.e.v. de E tels que*

$$F = Vect(u_1, \ldots, u_p) \quad et \quad G = Vect(v_1, \ldots, v_q)$$

Alors

$$F \perp G \iff \forall (i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, q]\!]\ , \quad \langle u_i, v_j \rangle = 0$$

Preuve.

Exemple. Dans $\mathbb{R}^4$ muni du p.s. usuel, on pose

$$F = Vect((1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1)) \quad \text{et} \quad G = Vect((0, 0, 1, 0), (1, 1, 0, -1))$$

Montrer que $F \perp G$.

Solution.

Définition 3.7 (Orthogonal d'une partie de E)
Soit $(E, \langle .\,,.\rangle)$ un espace préhilbertien réel et $A \subset E$.
On appelle orthogonal de A, et on note $A^\perp$, l'ensemble des vecteurs x de E orthogonaux à A. i.e.

$$A^\perp = \{x \in E \quad : \quad \forall y \in A \quad \langle x, y\rangle = 0\}$$

Proposition 3.8 *Soit $(E, \langle .\,,.\rangle)$ un espace préhilbertien réel. Alors*

$$A^\perp \text{ est un s.e.v. de } E.$$

Remarque. $A^\perp$ est un s.e.v. de E, même si A ne l'est pas.

Preuve.

Propriétés 3.9 *Soit $(E, \langle .\,,.\rangle)$ un espace préhilbertien réel. Alors :*

- $\{0_E\}^\perp = E$
- $E^\perp = \{0_E\}$

Preuve. $\forall x \in E$

- $\langle x\,, 0_E\rangle = 0 \Rightarrow \{0_E\}^\perp = E$
- $x \in E^\perp \Leftrightarrow \forall y \in E,\ \langle x\,, y\rangle = 0 \Rightarrow$ en particulier que $\langle x\,, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0_E$. Ainsi $E^\perp = \{0_E\}$.

Proposition 3.10 *Soit $(E, \langle .\,,.\rangle)$ un espace préhilbertien réel et $A \subset E$. Alors,*

$$A^\perp = (Vect(A))^\perp$$

où $Vect(A)$ est le s.e.v. de E engendré par A.

Preuve.

Exemple. Dans l'espace euclidien usuel $(\mathbb{R}^3, \langle .\,,.\rangle)$, déterminer $F^\perp$, où

$$F = Vect((1, 0, -1), (-1, 1, 0))$$

Solution.

Remarque. Attention, dire que deux s.e.v. de E (ou deux parties de E) sont orthogonaux ne signifie pas que l'un est l'orthogonal de l'autre. Penser à l'exemple de deux droites perpendiculaires dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

Exemple. $\mathbb{R}^3$ est muni du p.s. usuel. Soit

$$D_1 = Vect((1, 0, 0)) = \{(a, 0, 0)\ ;\ a \in \mathbb{R}\}$$
$$D_2 = Vect((0, 1, 0)) = \{(0, b, 0)\ ;\ b \in \mathbb{R}\}$$

On a

$$D_1 \perp D_2 \quad \text{car} \quad \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0)\rangle = 0$$

Mais

$$(D_1)^\perp = P = Vect((0, 1, 0), (0, 0, 1)) = \{(0, b, c)\ ;\ b, c \in \mathbb{R}\}$$

Proposition 3.11 *Soit $(E, \langle .\,,.\rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soit F un s.e.v. de E. Alors*

- $F \cap F^\perp = \{0_E\}$
- $F \perp F^\perp$
- $F \subset (F^\perp)^\perp$

Preuve.

3.2 Famille orthogonale, famille orthonormale

Définition 3.12 *Soit $(E, \langle .\,, . \rangle)$ un espace préhilbertien réel et I un ensemble d'indices quelconque.*

- *Une famille $\{x_i\}_{i\in I}$ d'éléments de E est dite orthogonale si :*

$$\forall i, j \in I \qquad (i \neq j \quad \Rightarrow \quad \langle x_i, x_j \rangle = 0)$$

- *Une famille $\{x_i\}_{i\in I}$ d'éléments de E est dite orthonormale si :*

$$\begin{cases} \{x_i\}_{i\in I} & \text{est orthogonale} \\ \\ \forall i \in I & \|x_i\| = 1 \end{cases}$$

- *Si $\{x_i\}_{i\in I}$ est une base de E, alors on parle de base orthogonale ou de base orthonormale.*

On abrègera parfois base orthonormale en : b.o.n.

Note. On appelle delta de Kronecker, la fonction de deux variables i et j notée et définie par

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

• Une famille $\{x_i\}_{i\in I}$ d'éléments de E est donc orthonormale, si

$$\forall i, j \in I \qquad \langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij}$$

Proposition 3.13 *Soit $(E, \langle .\,, . \rangle)$ un espace préhilbertien réel et I un ensemble d'indices quelconque. Toute famille orthogonale $\{x_i\}_{i\in I}$ de vecteurs **tous non-nuls** de E est libre.*

Preuve. Soit J une partie finie de I. Si $\displaystyle\sum_{j\in J} \alpha_j x_j = 0_E$ (avec $\alpha_j \in \mathbb{R}$), alors pour tout $k \in J$:

$$0 = \langle 0_E, x_k \rangle = \langle \sum_{j\in J} \alpha_j x_j, x_k \rangle = \sum_{j\in J} \alpha_j \langle x_j, x_k \rangle = \alpha_k \langle x_k, x_k \rangle = \alpha_k \|x_k\|^2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_k = 0, \quad \text{car} \quad \|x_k\| \neq 0$$

Théorème 3.14 (Formule de Pythagore)
Soit $(E, \langle .\,, . \rangle)$ un espace préhilbertien réel. $\forall x, y \in E$:

$$x \perp y \quad \Leftrightarrow \quad \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Preuve. On sait que $\forall x, y \in E$, $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle$. D'où

$x \perp y \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Proposition 3.15 *Soit $(E, \langle .\,, . \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $\{x_i\}_{1\leq i\leq p}$ une famille de p éléments de E. Alors*

$$\{x_i\}_{1\leq i\leq p} \;\; \text{est orthogonale} \quad \Rightarrow \quad \|\sum_{i=1}^{p} x_i\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|x_i\|^2$$

• *La réciproque est fausse pour $p \geq 3$.*

Preuve.

3.3 Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt

Théorème 3.16 (Orthogonalisation de Gram-Schmidt)
Soit $(E, \langle ., . \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ une famille libre de E.
La famille $\{q_1, q_2, \ldots, q_p\}$ définie par récurrence par :

$$q_1 = v_1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \{2, \ldots, p\} \;\; q_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, q_i \rangle}{\|q_i\|^2} q_i$$

Vérifie :

- $\{q_1, q_2, \ldots, q_p\}$ *est une famille orthogonale*
- $Vect(v_1, v_2, \ldots, v_p) = Vect(q_1, q_2, \ldots, q_p)$

► *Pour obtenir une famille orthonormale, on normalise les vecteurs q_i, i.e., on pose*

$$\varepsilon_i = \frac{q_i}{\|q_i\|}, \quad \forall i \in [\![1, p]\!]$$

La famille obtenue $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p\}$ est une famille orthonormale.

Preuve.

Exemple. Soit $E = \mathbb{R}^4$, muni de son produit scalaire canonique. Soit $F = Vect(v_1, v_2, v_3)$ avec :

$$v_1 = (0, 0, 1, 1) \quad ; \quad v_2 = (0, 0, 1, 0) \quad ; \quad v_3 = (1, 1, 1, 0)$$

Déterminer une base orthonormale de F.

Solution.

3.4 Base orthonormale et espace euclidien

Définition 3.17 (Espace euclidien)
On appelle espace euclidien, tout espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension finie, muni d'un produit scalaire.

Proposition 3.18 *Tout espace euclidien $(E, \langle . , . \rangle)$ admet une base orthonormale.*

Preuve. On part d'une base quelconque de E et on utilise le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Exemples. Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique :

1) La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

2) $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$, où

$$\varepsilon_1 \equiv \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} \quad ; \quad \varepsilon_2 \equiv \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

avec $\theta \in [0, 2\pi[$.

3) $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$, où

$$\varepsilon_1 \equiv \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix} \quad ; \quad \varepsilon_2 \equiv \begin{bmatrix} \cos\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ -\cos\varphi \end{bmatrix} \quad ; \quad \varepsilon_3 \equiv \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

avec $\theta \in [0, 2\pi[$ et $\varphi \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Théorème 3.19 *Toute famille orthonormale d'un espace euclidien E peut être complétée en une base orthonormale de E.*

Preuve. On utilise le théorème de la base incomplète et on orthonormalise les vecteurs ajoutés grâce au procédé de GRAM-SCHMIDT.

Proposition 3.20 *Soit $(E, \langle . , . \rangle)$ un espace euclidien, $\mathcal{B}$ une base de E et $A = M_{\mathcal{B}}(\langle . , . \rangle)$. Alors :*

- *$\mathcal{B}$ est orthogonale si et seulement si $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$.*
- *$\mathcal{B}$ est orthonormale si et seulement si $A = I_n$.*

Preuve. Posons $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$. Par définition : $A = [\langle e_i, e_j \rangle]_{1 \leq i,j \leq n}$.

Proposition 3.21 *Soit $(E, \langle . , . \rangle)$ un espace euclidien et $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. Pour tout $x, y \in E$, en notant $X = M_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = M_{\mathcal{B}}(y)$:*

$$\langle x, y \rangle = X^T Y$$

Preuve. La matrice de $\langle . , . \rangle$ dans une base orthonormale est I_n.
Remarque importante. Dans un espace euclidien muni d'une b.o.n., le produit scalaire de 2 vecteurs s'exprime comme le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 3.22 (Règles de calcul en base orthonormale)
Soit $(E, \langle . , . \rangle)$ un espace euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E. Pour tout $x, y \in E$

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x , e_i \rangle e_i \quad ; \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x , e_i \rangle^2 \quad ; \quad \langle x , y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x , e_i \rangle \langle y , e_i \rangle$$

Preuve.