Preuve : Soit J une partie finie de I. Si $\sum_{j\in J}\alpha_j x_j = 0$, alors pour tout $k \in J$:

$\langle 0, x_k \rangle$

$$0 = \langle \sum_{j\in J}\alpha_j x_j, x_k\rangle = \sum_{j\in J}\alpha_j\langle x_j, x_k\rangle = \alpha_k\langle x_k, x_k\rangle = \alpha_k\|x_k\|^2 \quad\Rightarrow\quad \alpha_k = 0, \quad \text{car} \quad \|x_k\| \neq 0$$

Remarque : En conséquence, toute famille orthonormale $\{x_i\}_{i\in I}$ de vecteurs de E est libre.

Théorème 3.15 (Formule de PYTHAGORE)
Soit $(E, \langle . , . \rangle)$ un espace préhilbertien réel. $\forall x, y \in E$:

$$x \perp y \quad\Leftrightarrow\quad \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Preuve : $x\perp y \Leftrightarrow \langle x, y\rangle = 0 \Leftrightarrow \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Proposition 3.16 *Soit $(E, \langle . , . \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $\{x_i\}_{1\leq i\leq p}$ une famille finie d'éléments de E :*

$$\{x_i\}_{1\leq i\leq p} \ \text{est orthogonale} \quad\Rightarrow\quad \|\sum_{i=1}^{p} x_i\|^2 = \sum_{i=1}^{p}\|x_i\|^2$$

La réciproque est fausse pour $p \geq 3$.

Preuve : Par récurrence ou bien directement en écrivant :

$$\begin{aligned}
\|\sum_{i=1}^{p} x_i\|^2 = \langle\sum_{i=1}^{p} x_i , \sum_{i=1}^{p} x_i\rangle = \langle\sum_{i=1}^{p} x_i , \sum_{j=1}^{p} x_j\rangle &= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\langle x_i , x_j\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{p}\langle x_i , x_i\rangle \quad \text{car} \ \langle x_i , x_j\rangle = 0 \ \text{si} \ i \neq j \\
&= \sum_{i=1}^{p}\|x_i\|^2
\end{aligned}$$

• Montrons par un contre exemple que la réciproque est fausse si $p \geq 3$.
Considérons l'espace euclidien usuel $(\mathbb{R}^2, \langle . , . \rangle)$. Soit $x_1 = (1,0)$, $x_2 = (0,1)$ et $x_3 = (1,-1)$. On a :

$$\|x_1 + x_2 + x_3\|^2 = \|(1,0) + (0,1) + (1,-1)\|^2 = \|(2,0)\|^2 = 4$$

$$\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \|x_3\|^2 = \|(1,0)\|^2 + \|0,1)\|^2 + \|(1,-1)\|^2 = 1 + 1 + 2 = 4$$

Les deux quantités sont égales, mais les vecteurs ne sont pas deux à deux orthogonaux. Par exemple

$$\langle x_1 , x_3\rangle = 1 \neq 0$$

3.3 Procédé d'orthogonalisation de GRAM-SCHMIDT

Dans tout $\mathbb{R}$-ev E de dimension finie et pour toute f.b.s. φ sur E, il existe une base φ-orthogonale. Le théorème (ref : voir chapitre Forme bilinéaire) établit l'existence d'une telle base mais ne fournit pas le moyen de la construire. La méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, permet, à l'aide du produit scalaire, de construire des bases orthogonales à partir d'une base quelconque de E.

Théorème 3.17 (Orthogonalisation de GRAM-SCHMIDT)
Soit $(E, \langle . , . \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ une famille libre de E.
La famille $\{q_1, q_2, \dots, q_p\}$ définie par récurrence par :

$$q_1 = v_1 \quad et \quad \forall k \in \{2, \dots, p\} \ q_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1}\frac{\langle v_k, q_i\rangle}{\|q_i\|^2}q_i$$

Vérifie :