Algebre bilinéaire

CM

2022-2023

Réduction des endomorphismes

$\mathcal{L}(E)$ ensemble d'application linéaire de E dans E (endomorphismes)

$f(v) = \lambda v$: image de v est colinéaire à v

* Le Vecteur propre est non nul

$$f(0_E) = 0_E = \lambda\, 0_E$$ donc on exclut toujours 0_E

Exemple 1.

$$f(x,y) = \left(x - y/2 \,,\, -x/2 + y\right)$$

a) $v_1(1,1)$ f associé $\lambda_1 = 1/2$

$$f(v_1) = f(1,1) = \left(1 - 1/2 \,,\, -1/2 + 1\right) = \left(1/2 \,,\, 1/2\right)$$

$$= 1/2\,(1,1) = \frac{1}{2} v_1$$

$f(v_1) = \frac{1}{2} v_1$ $\qquad v_2 = (1,-1)$ $\lambda_2 = 3/2$

$$f(v_2) = f(1,-1) = 3/2\,(1,-1) = 3/2\, v_2$$

Exercice : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tq

$$f(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$$

Trouver tous les éléments propres de f

Solution générale à faire tout le temps

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$f(x) = \lambda(x) \Leftrightarrow (x_2, x_1) = \lambda(x_1, x_2) \Leftrightarrow (x_2, x_1) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_1 = \lambda x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 - \lambda x_1 = 0 \\ x_1 - \lambda x_2 = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_1 + \lambda L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1 - \lambda^2) x_1 = 0 \\ x_1 - \lambda x_2 = 0 \end{cases} \quad (S)$$

Cas 1 : $(1 - \lambda^2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ou (-1)

Si $\lambda = 1$ alors $(S) = \begin{cases} 0 = 0 \\ x_1 = x_2 \end{cases}$

$$\Rightarrow x = (x_2, x_1) = x_2(1, 1)$$

$\Rightarrow 1 = 1$ est une valeur propre de vecteurs propres

$x = c\,(1,1)$ sur $\mathbb{R}^*$ / $(1,1)$
$(2,2)$
$(3,3)$

$*$ Si $\lambda = -1$ alors $(S) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ x_1 = -x_2 \end{cases} \Leftrightarrow (-x_2, x_1) = x_2(-1,1)$$

$\Rightarrow \lambda = (-1)$ est une valeur propre de vecteurs propres

$$x = c\,(-1,1) \text{ avec } c \in \mathbb{R}^*$$

Cas 2 : $(1-\lambda^2) \neq 0$ dans ce cas (S)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = (0,0) \text{ contradiction}$$

car $x \neq (0,0)$

Conclusion :

- $sp(f) = \{-1, 1\}$
- Les vecteurs propres de f sont les éléments de $\mathbb{R}^2$ de la forme :

$c\,(-1,1)$ pour $\lambda = -1$ avec $c \in \mathbb{R}^*$
$c\,(1,1)$ pour $\lambda = 1$

Preuve (proposition 1.5) $\left.\begin{matrix}\text{Ker (s.e.v)}\\ \text{noyau}\end{matrix}\right.$

$$id_E : E \longrightarrow E$$
$$x \longmapsto x$$

Soit $x \in E$

$$x \in E\lambda \Leftrightarrow f(x) = \lambda x \Leftrightarrow f(x) - \lambda x = 0_E$$
$$\Leftrightarrow f(x) - \lambda id_E(x) = 0_E$$
$$\Leftrightarrow (f - \lambda id_E)(x) = 0_E$$
$$\Leftrightarrow x \in Ker(f - \lambda id_E)$$

On a donc $E\lambda = Ker(f - \lambda id_E)$

$E\lambda$ est donc un sous espace vectoriel de E car c'est le noyau de l'endomorphisme $f - \lambda id_E$

Preuve (1.7):

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\lambda \in sp(f) \Leftrightarrow \exists x \in E \setminus \{0_E\} : f(x) = \lambda x$$
$$\Leftrightarrow \text{ // } : f(x) - \lambda x = 0_E / 0$$
$$\Leftrightarrow \text{ // } : f(x) - \lambda id_E(x) = 0_E$$
$$\Leftrightarrow \text{ // } : (f - \lambda id_E)(x) = 0_E$$
$$\Leftrightarrow E\lambda = Ker(f - \lambda id_E) \neq \{0_E\}$$
$$\Leftrightarrow (f - \lambda id_E) \text{ non injectif}$$

Remarque :

1) Si $\lambda \notin sp(f)$ alors $E\lambda = \{0_E\}$

2) $\mathcal{L}(U_E)$ valeur propre peut-être nulle, dans ce cas on a les équivalents

$0 \in sp(f) \Leftrightarrow \ker f \neq \{U_E\} \Leftrightarrow f$ non injectif

3) Cependant, un vecteur propre est non nul par def une valeur propre peut-être nulle

Preuve (1.8)

$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

(1) $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0_E \Rightarrow f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = 0_E$

$\Rightarrow \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) = 0_E$

$\Rightarrow \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 = 0_E$

(1) $\alpha_1 v_1 + \alpha_1 v_2 = 0_E \Leftrightarrow -\alpha_1 v_1 = \alpha_1 v_2$

(2) $\alpha_1 v_1 - \alpha_1 \lambda_2 v_2 = 0_E \Leftrightarrow \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\text{d'après l'énoncé } \neq 0} \alpha_1 \underbrace{v_1}_{\neq 0_E \text{ pas de vecteur nulle}} = 0_E$

$\Rightarrow \alpha_1 = 0$

je reporte (1)

$0 + \alpha_2 v_2 = 0_E \Rightarrow \alpha_2 = 0$

d'où $\alpha_1 = \alpha_2 = 0 \Rightarrow \{v_1, v_2\}$ est libre

$U_{M_{n,1}}(\mathbb{K}) \longleftarrow$ matrice carré endomorphisme

$A = M_{n,1}(\mathbb{K}) \longrightarrow M_{n,1}(\mathbb{K})$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \longrightarrow AX = \begin{bmatrix} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Solution : V_1, V_2, V_3 non nuls

1) $AV_1 = -V_1 \Rightarrow V_1$ vect propre de A, associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1$

2) $AV_2 = 2V_2 \Rightarrow V_2$ vect propre $\lambda_2 = 2$

) $AV_3 = 2V_3 \Rightarrow V_3$ vect propre $\lambda_3 = \lambda_2 = 2$

Attention. V_2 et V_3 ne sont pas liés $\Rightarrow$ sont libres

$\alpha V_2 + \beta V_3 = 0_E$

$\alpha + 0 = 0 \qquad \alpha = 0$

$0 + \beta = 0 \qquad \beta = 0$

Donc libre

$A \in M_n(\mathbb{K})$

Preuve (2.5) : Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$

$$X \in E_\lambda \iff AX = \lambda X \iff AX - \lambda X = 0_{n,1} \quad \left(0_{n,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\iff AX - \lambda I_n X = 0_{n,1} \qquad I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\hookrightarrow$ matrice identité

$$\iff (A - \lambda I_n) X = 0_{n,1}$$
$$\iff X \in \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)$$

donc $E_\lambda = \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)$

. E_λ est un s.e.v et $M_{n,1}(\mathbb{K})$ $\in$ car c'est le noyau de la matrice carrée $(I - \lambda I_n)$

Preuve (2.7) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\lambda \in sp(A) \iff \exists X\ M_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0_{n,1}\} = AX = \lambda X$$
$$\iff \text{//} : AX - \lambda X = 0_{n,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\iff \text{//} : AX - \lambda I_n X = 0_{n,1}$$
$$\iff E_\lambda : \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0_{n,1}\}$$

$$\iff A - \lambda I_n \text{ est non-inversible}$$

* Si $X \neq 0$ $\quad AX = 0 \quad\quad X \in \operatorname{Ker}(A)$

$X \in \operatorname{Ker}(A)$ et $X \neq 0$

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$AX = O_{n,1}$

$A^{-1}AX = A^{-1} O_{n,1}$

$X = A^{-1} O_{n,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

pas inversible => non bijectif, surjectif, injectif

$M_{n,1}(\mathbb{K}) \leftarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

$$\underbrace{x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{f_1} + \underbrace{x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{f_2}$$

$n = 2$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} =$$

$$a \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{f_1} + b \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{f_2} + c \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{f_3} + d \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{f_4}$$

3 - Polynome caracteristique

$\mathbb{K}$ espace vectoriel sont de dimension finie

↳ priviligier les matrices

Base B

$B = (e_1, \dots, e_n)$

$$\begin{tikzcd}
x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n \arrow[r] & X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\
E \arrow[u] \arrow[r] & M_{n,1}(\mathbb{K}) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

$$f : E \longrightarrow E$$

$$sp(f) = sp(A) \qquad A = M_B(f)$$

$$f(x) = \lambda x \qquad Ax = \lambda x$$

proposition 3.2 : POSSIBLE EXAMENS (Th. De Base)

Preuve (3.2)

Soient A et $A' \in M_a(\mathbb{K})$ 2 matrices semblables

$\exists\, P \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ inversible telle que $A' = P^{-1}AP$

$$P_{A'}(\lambda) = \det(A' - \lambda I_n) \qquad P^{-1} \times P = I_n$$

$$= \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1} I_n P)$$

$$= \det(P^{-1}AP - P^{-1}\lambda I_n P)$$

$$= \det(P^{-1}(A - \lambda I_n)P)$$

$$= \det(P^{-1}) \det(A - \lambda I_n) \det(P)$$

$$= \det(P^{-1})\, P_A(\lambda) \det(P)$$

$$= P(A) \quad \left[\begin{array}{l} \det(AB) = \det(A)\det(B) \\ \det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A} \end{array}\right]$$

On a donc $P_{A'}(\lambda) = P_A(\lambda)$

P^{-1} I_n $\qquad$ $AI_n = A$

$P^{-1} P = I_n$ $\qquad$ $I_n A = A$

Solution :

1) Polynome caracteristique A :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) =$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 4 \\ 1 & (2-\lambda) & 1 \\ 2 & 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} \qquad \lambda I_4 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$

$$= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 4 \\ 4-\lambda & 2-\lambda & 1 \\ 4-\lambda & 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 4 \\ 0 & 2-\lambda & -3 \\ 0 & 4 & -6-\lambda \end{vmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

$$= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 4 \\ 0 & 2-\lambda & -3 \\ 0 & 2-\lambda & -\lambda \end{vmatrix} \quad C_2 \longleftarrow C_2 + 2C_3$$

$$= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 8 & 4 \\ 0 & -4-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \qquad (4-\lambda) \begin{vmatrix} -4-\lambda & -3 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)(-4-\lambda)(-\lambda)$$

$$sp(f) = sp(A) = \{-4, 0, 4\}$$

2) $0 \in sp(A) \iff A$ non inversible
$\iff f$ non bijectif

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + (-1) d \begin{vmatrix} h & c \\ h & i \end{vmatrix}$$

X est racine P

$P = (X - a)(\ldots \ldots)$

$P = (X-1)^2 = X^2 - 2X + 1$

$P = (X-1)(X-1)^2 (X-3)$

orde de multiplicité . nombre de fois qu'il est racine

$1 \longrightarrow 3$

$3 \longrightarrow 1$

$(X-1)^{3} (X-3)$

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$
$$= \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right)$$

$$= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$$

$Sp_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset \qquad Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{-i, i\}$

Solutions:

- $v_1 = (1,1)$ est un vecteur propre de $f \longrightarrow$ valeur propre $\lambda_1 = \frac{1}{2}$
- $v_2 = (1,-1)$ est un vecteur propre de $f \longrightarrow$ valeur propre $\lambda_2 = \frac{3}{2}$

$\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ car $(\{v_1, v_2\}) = 2$

$\Rightarrow (v_1, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$, formée de vecteurs propre de f

$\Rightarrow f$ est diagonalisable

$$M_B(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 \ldots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} f(v_1) & f(v_2) & \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \end{array} \end{array}$$

$$f(v_1) = \frac{1}{2} v_1 = \frac{1}{2} v_1 + 0 v_2$$

$$f(v_2) = \frac{3}{2} v_2 = 0 v_1 + \frac{3}{2} v_2$$

$$f : E \longrightarrow E$$
$$x \longrightarrow f(x)$$

$A \in M_n(K)$ $\quad A : M_{n,1}(\mathbb{K}) \longrightarrow M_{n,1}(\mathbb{K})$

$$X \longrightarrow AX$$

Preuve (4.5)

A possède n valeur propre distinctes 2 à 2 $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$

$\Rightarrow \{V_i\}_{i=1}^{n}$ la famille des vecteurs propres est libre

dans $M_{n,1}(\mathbb{K})$ Mais $\dim\left(M_{n,1}(\mathbb{K})\right) = n$

$\Rightarrow$ la famille de vecteur propre et avec base de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ et par suite

A est diagonalisable

$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

polynome caractéristique

1) Valeur propre de A : $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix}$ $C_1 \leftarrow C_1 - C_2$

$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -2-\lambda & -\lambda \end{vmatrix}$ $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$

$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)$

$P_A(\lambda) = (2-\lambda)(1-\lambda)$

$Sp(A) = \{1, 2\}$ multiplicité $(1) = 1$
multiplicité $(2) = 1$

$\left.\begin{array}{l} \text{A est d'ordre 2} \\ \text{A admet 2 valeurs propres distinctes} \end{array}\right\} \Rightarrow$ A est diagonalisable

2) Sous espace propres

F_1 : Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in M_{2,1}(\mathbb{R})$

$X \in E_1 \iff AX = X \iff$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

5. Trigonalisation

5.1 Matrice triangulaire

$A = PDP^{-1}$

Si on peut pas diagonaliser on trigonalise $= PTP^{-1}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix}$$

Trigonaliser la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

on cherche le spectre = l'ensemble des valeurs propres de A.

Spectre A

$\lambda \in sp(A) \Leftrightarrow P_A(\lambda) = 0$

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \\ \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$$

$$= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & -1 \\ -1-\lambda & 1-\lambda & -1 \\ -1-\lambda & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & -1 \\ -1-\lambda & 1-\lambda & -1 \\ -1-\lambda & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)^3$$

$P_A(\lambda) = -(1+\lambda)^3$

$sp(A) = \{-1\}$ multiplicité $(-1) = 3$

- sous espace propre

$E_{-1} = \mathrm{Ker}(A + I_3)$

Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$X \in E_{-1} \Leftrightarrow (A + I_3) X = 0_{3,1}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases} = -x + 2y - z = 0 \Leftrightarrow x = 2y - z$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 2y - z \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 2y \\ y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Synthèse :

- $P_A(\lambda) = -(1+\lambda)^3$. $Sp(A) = \{1\}$ multiplicité $(-1) = 3$

$E_{-1} = Vect(V_1, V_2)$ avec $V_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $V_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\dim(E_{-1}) = 2 \neq 3 =$ multiplicité (-1)

$\Rightarrow$ A est non diagonalisable

Cependant P_A est scindé dans $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Cherchons donc un vecteur V_3 tel que

① $\mathcal{B} = (V_1, V_2, V_3)$ soit une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$

② $[AV_1, AV_2, AV_3]$ soit triangulaire, ie de la forme

$$T = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccc} AV_1 & AV_2 & AV_3 & \\ \left[\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right. & \begin{array}{c} 0 \\ -1 \\ 0 \end{array} & \left.\begin{array}{c} \alpha \\ \beta \\ -1 \end{array}\right] & \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{array} \end{array}$$

et semblable à A

$$AV_1 = -V_1 + 0V_2 + 0V_3 = -V_1$$
$$AV_2 = 0V_1 - 1V_2 + 0V_3 = -V_2$$
$$AV_3 = \alpha V_1 + \beta V_2 - 1V_3 \Leftrightarrow (A + I_3)V_3 = \alpha V_1 + \beta V_2$$

Solution systeme homogène. $AX = B$ (S)

$X = X_h + X_p$ $\quad$ X_h = Solution de $AX = 0$

X_p = Solution de (S)

Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$$(A + I_3)X = \alpha V_1 + \beta V_2 \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y - z = 2\alpha - \beta \\ -x + 2y - z = \alpha \\ -x + 2y - z = \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = 2\alpha - 2\beta \Rightarrow 0 = \alpha - \beta \\ 0 = \alpha - \beta \\ -x + 2y - z = \beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - z - \beta \\ \alpha = \beta \end{cases} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 2y-z \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \boxed{\alpha = \beta}$$

$$\Leftrightarrow X = \underbrace{y\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{X_h} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\beta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{X_p} \quad (\alpha, \beta) \neq (0,0)$$

$X_p \rightarrow$ libre independant des précédents

On choisit $\beta = 1 \Rightarrow \alpha = 1$

et $V_3 = X_p = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

On verifie facilement que (V_1, V_2, V_3) est libre $\rightarrow$ donc une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et la matrice T est $T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

En notant $P = [V_1 \; V_2 \; V_3] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

On a $A = PTP^{-1}$

$$A = PDP^{-1}$$

$$A^2 = P D \underbrace{P^{-1} P}_{\text{Identité}} D P^{-1}$$

$$= PDDP^{-1}$$

$$= PD^2P^{-1}$$

$PTP^{-1} \rightarrow$ trigonalisable

$PDP^{-1} \rightarrow$ diagonalisable

Norme associée à un produit scalaire

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Preuve : Mq $\|.\|$ est une norme sur E

1) $\forall x \in E$, $\|x\| = 0 \iff \sqrt{\langle x, x \rangle} = 0 \Rightarrow x = 0_E$ car $\langle ; \rangle$ est définie

2) $\forall x \in E, \forall y \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x ; x \rangle}$

$$= \sqrt{\lambda^2} \sqrt{\langle x ; x \rangle}$$

$$= |\lambda| \, \|x\|$$

3) $\forall x, y \in E$

$$\sqrt{\langle x+y, x+y \rangle} \leq \sqrt{\langle x+x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

par l'inégalité de minkowski

$\Downarrow$

cas particulier

-> norme vient d'un produit scalaire

Inégalité triangulaire est valable que pour la norme 2.

$$\langle x,y\rangle^2 \leq \langle x,x\rangle \langle y,y\rangle$$

$$|\langle x,y\rangle| \leq \sqrt{\langle x,x\rangle}\ \sqrt{\langle y,y\rangle}$$

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\ \|y\|$$

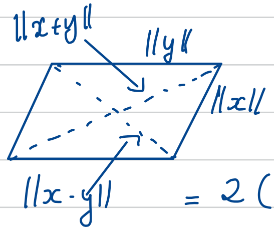
Montrer que $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2$ $\left((a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2\right)$

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle$$

$$= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle$$

$$= \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$



$$= 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

$\langle A, B \rangle = tr(A^T B)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Montrer que $A \perp B$

$$A^T B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\langle A, B \rangle = tr(A^T B) = 0$$

Donc $A \perp B$

$0_E \perp x, \forall x \in E$

$$\langle x, 0_E \rangle = \langle x, 0_E + 0_E \rangle = \langle x, 0_E \rangle + \langle x, 0_E \rangle = 2 \langle x, 0_E \rangle$$

$$\longrightarrow \langle x, 0_E \rangle = 0$$

- $\forall x \in E, \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0_E$ par definité de $\langle , \rangle$