

ALGÈBRE LINÉAIRE ET BILINÉAIRE

EXAMEN

◁ Consignes ▷

Durée : 120 mn

- ▶ Les documents et les supports électroniques sont interdits.
- ▶ L'épreuve est composée d'exercices indépendants.
- ▶ Le barème est à titre indicatif.
- ▶ La qualité de la rédaction et la rigueur des justifications seront prises en compte dans la notation.

◁ Sujet de l'épreuve ▷

Exercice 1 Système différentiel linéaire (5pts)

On considère le système différentiel linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_2(t) - 3e^t \\ x_2'(t) = -2x_1(t) + 4x_2(t) + 2e^t \end{cases}$$

1. Écrire ce système sous la forme matricielle : $X'(t) = AX(t) + B(t)$.
2. Trigonaliser la matrice A .
3. Résoudre le système différentiel.
4. Déterminer l'unique solution $X(t)$ qui vérifie la condition initiale : $X(0) = \begin{pmatrix} 14 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 Espace Préhilbertien Réel (8pts)

On considère l'application $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$\phi(x, y) = 3x_1y_1 + x_1y_3 + 2x_2y_2 + x_3y_1 + 3x_3y_3$$

où $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$.

1. Montrer que ϕ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^3$.
2. Donner la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Montrer que $\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$$\phi(x, x) = \left(\sqrt{3}x_1 + \frac{x_3}{\sqrt{3}} \right)^2 + 2x_2^2 + \frac{8}{3}x_3^2.$$

4. Montrer que ϕ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.
5. On considère les vecteurs $u = (1, 1, 0)$, $v = (1, -1, -1)$ et $w = (1, -4, 5)$.
Montrer que $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
6. La base $\mathcal{B}'$ est-elle orthogonale pour le produit scalaire ϕ ? Orthonormale ?
7. Donner la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 3 Espace Préhilbertien Réel (7pts)

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire suivant

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_2[X] \quad \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(x)Q(x) \, dx.$$

On note $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire.

1. Vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est effectivement un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Calculer $\|1\|$ et en déduire le vecteur $P_1 = \frac{1}{\|1\|}$
3. Calculer $Q_2 = X - \langle X, P_1 \rangle P_1$ et montrer que $Q_2 \perp P_1$ pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
4. Calculer $P_2 = \frac{Q_2}{\|Q_2\|}$.
5. Déterminer un vecteur P_3 tel que la famille (P_1, P_2, P_3) forme une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.