CY TECH

2022/2023
Département Mathématiques
PreIng2

ALGÈBRE LINÉAIRE ET BILINÉAIRE

Devoir surveillé 3
7 juin 2023

◁ Consignes ▷

Durée : 90 mn

► Les documents et les supports électroniques sont interdits.
► L'épreuve est composée de 3 exercices indépendants.
► Le barème est à titre indicatif.

Important

► Veuillez écrire lisiblement votre NOM et votre PRÉNOM et en lettres majuscules.
► Veuillez également noter le NOM ou le NUMÉRO de votre groupe sur votre copie.

Tout manquement à ces consignes entrainera des sanctions.

◁ Sujet de l'épreuve ▷

Exercice 1. (*5 points*)

Résoudre le système différentiel linéaire

$$\begin{cases} x' = 5x - 7y + 7z \\ y' = 3x - 3y + 5z \\ z' = 3x - y + 3z \end{cases}$$

Exercice 2. (*7 points*)

On fixe $a, b \in \mathbb{R}$. Pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ on pose

$$\phi(x,y) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + 3x_2y_1 + x_2y_2.$$

1. Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, ϕ est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.
2. Montrer que ϕ est symétrique si et seulement si $b = 3$.
3. On fixe $b = 3$. Montrer que pour tout $x = (x_1, x_2)$:

$$\phi(x,x) = (a-9)x_1^2 + (3x_1 + x_2)^2.$$

4. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur a pour que ϕ soit un produit scalaire.

Dans la suite de l'exercice on fixe $a = 13$ et $b = 3$.

5. Montrer que les vecteurs $v_1 = (1, 1)$ et $v_2 = (1, -4)$ sont orthogonaux pour le produit scalaire ϕ.

6. En déduire $\{v_1\}^\perp$.
7. Transformer la base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ en une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3. (8 *points*)

On considère $E = \mathbb{R}_2[X]$. Pour tout $P, Q \in E$, on pose

$$\langle P, Q \rangle = P(-1)Q(-1) + 2P(0)Q(0) + P(1)Q(1).$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.

   On notera $\| \cdot \|$ la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

2. Calculer la norme du polynôme constant $P = 1$. On notera $P_0 = \dfrac{1}{\|1\|}$.

3. Montrer que le polynôme $P = X$ est orthogonale à P_0 pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

4. Calculer $\|X\|$. On notera $P_1 = \dfrac{X}{\|X\|}$.

5. On pose $Q = X^2 - \langle X^2, P_0 \rangle P_0 - \langle X^2, P_1 \rangle P_1$ et $P_2 = \dfrac{Q}{\|Q\|}$. Calculer les coefficients de P_2.

6. Montrer que (P_0, P_1, P_2) forme une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.