Algèbre linéaire et bilinéaire

Devoir surveillé 3

7 juin 2023

◁ Consignes ▷

Durée : 90 mn

▶ Les documents et les supports électroniques sont interdits.
▶ L'épreuve est composée de 3 exercices indépendants.

Important

▶ Veuillez écrire lisiblement votre NOM et votre PRÉNOM et en lettres majuscules.
▶ Veuillez également noter le NOM ou le NUMÉRO de votre groupe sur votre copie.

Tout manquement à ces consignes entrainera des sanctions.

◁ Sujet de l'épreuve ▷

Exercice 1. (5 *points*)

Résoudre le système différentiel linéaire

$$\begin{cases} x' = 5x - 7y + 7z \\ y' = 3x - 3y + 5z \\ z' = 3x - y + 3z \end{cases}$$

Réponse. *On pose la matrice* $A = \begin{bmatrix} 5 & -7 & 7 \\ 3 & -3 & 5 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ *et on réécrit le système sous forme matricielle*

$$X'(t) = AX(t), \quad X = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}.$$

Pour réduire la matrice A *on calcule son polynôme caractéristique :*

$$\begin{aligned} p_A(X) &= (5-X)(-3-X)(3-X) - 21 - 5\times 21 - 21(-3-X) + 5(5-X) + 21(3-X) \\ &= -X^3 + 5X^2 + 9X - 45 - 21 - 5\times 21 + 3\times 21 + 21X + 25 - 5X + 3\times 21 - 21X \\ &= -X^3 + 5X^2 + 4X - 20 \\ &= -(X-2)(X^2 - 3X - 10) \\ &= -(X-2)(X-5)(X+2). \end{aligned}$$

La matrice A *est donc diagonalisable puisque* p_A *est scindé à racines simples. En résolvant des systèmes linéaires on trouve les vecteurs propres associés aux valeurs propres* 5, 2 *et* -2, *on obtient*

$$A = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ et } P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

On en déduit, avec $Y = P^{-1}X$

$$\begin{aligned} X' = AX &\Leftrightarrow Y' = DY \\ &\Leftrightarrow Y(t) = \begin{bmatrix} c_1e^{5t} \\ c_2e^{2t} \\ c_3e^{-2t} \end{bmatrix} \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow X(t) = P\begin{bmatrix} c_1e^{5t} \\ c_2e^{2t} \\ c_3e^{-2t} \end{bmatrix} \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow X(t) = \begin{pmatrix} c_1e^{5t} + 2c_3e^{-2t} \\ c_1e^{5t} + c_2e^{2t} + c_3e^{-2t} \\ c_1e^{5t} + c_2e^{2t} - c_3e^{-2t} \end{pmatrix} \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Conclusion : L'ensemble des solutions du système différentiel linéaire homogène est :

$$\begin{cases} x(t) = c_1e^{5t} + 2c_3e^{-2t} \\ y(t) = c_1e^{5t} + c_2e^{2t} + c_3e^{-2t} \\ z(t) = c_1e^{5t} + c_2e^{2t} - c_3e^{-2t} \end{cases} \quad \textit{avec } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2. (7 *points*)

On fixe $a, b \in \mathbb{R}$. Pour tout $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ on pose

$$\phi(x, y) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + 3x_2y_1 + x_2y_2.$$

1. Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, ϕ est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.
2. Montrer que ϕ est symétrique si et seulement si $b = 3$.
3. On fixe $b = 3$. Montrer que pour tout $x = (x_1, x_2)$:
$$\phi(x, x) = (a - 9)x_1^2 + (3x_1 + x_2)^2.$$
4. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur a pour que ϕ soit un produit scalaire.

Dans la suite de l'exercice on fixe $a = 13$ et $b = 3$.

5. Montrer que les vecteurs $v_1 = (1, 1)$ et $v_2 = (1, -4)$ sont orthogonaux pour le produit scalaire ϕ.
6. En déduire $\{v_1\}^{\perp}$.
7. Transformer la base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ en une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$.

Réponse. *1.* • *Forme :* $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, $\phi(x, y) \in \mathbb{R}$ *puisque c'est une somme de réel.* $\mathbb{R}^2$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel donc* ϕ *est bien une forme.*

• *Linéaire à gauche :* $\forall x, x', y \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \phi(x + \lambda x', y) &= a(x_1 + \lambda x_1')y_1 + b(x_1 + \lambda x_1')y_2 + 3(x_2 + \lambda x_2')y_1 + (x_2 + \lambda x_2')y_2 \\ &= ax_1y_1 + bx_1y_2 + 3x_2y_1 + x_2y_2 + \lambda(ax_1'y_1 + bx_1'y_2 + 3x_2'y_1 + x_2'y_2) \\ &= \phi(x, y) + \lambda\phi(x', y) \end{aligned}$$

donc ϕ *est linéaire par rapport au premier argument.*

• *Linéaire à droite :* $\forall x, y, y' \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \phi(x, y + \lambda y') &= ax_1(y_1 + \lambda y_1') + bx_1(y_2 + \lambda y_2') + 3x_2(y_1 + \lambda y_1') + x_2((y_2 + \lambda y_2') \\ &= ax_1y_1 + bx_1y_2 + 3x_2y_1 + x_2y_2 + \lambda(ax_1y_1' + bx_1y_2' + 3x_2y_1' + x_2y_2') \\ &= \phi(x, y) + \lambda\phi(x, y') \end{aligned}$$

donc ϕ est linéaire par rapport au second argument.

Conclusion : ϕ est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.

2. *Raisonnons directement par équivalence :*

$$\begin{aligned}
&\phi \text{ est symétrique } \Leftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \quad \phi(x,y) = \phi(y,x) \\
&\Leftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \quad ax_1y_1 + bx_1y_2 + 3x_2y_1 + x_2y_2 = ax_1y_1 + bx_2y_1 + 3x_1y_2 + x_2y_2 \\
&\Leftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \quad (b-3)x_1y_2 = (b-3)x_2y_1 \\
&\Leftrightarrow b = 3.
\end{aligned}$$

3. *Pour $b = 3$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a*

$$\begin{aligned}
(a-9)x_1^2 + (3x_1 + x_2)^2 &= (a-9)x_1^2 + 9x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2 \\
&= ax_1^2 + 3x_1x_2 + 3x_2x_1 + x_2^2 \\
&= \phi(x,x).
\end{aligned}$$

4. *Pour $b = 3$ on sait que ϕ est une forme bilinéaire symétrique. Il s'agit donc de trouver une condition nécessaire et suffisante sur a pour que ϕ soit définie et positive.*

   - *ϕ est positive si pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $\phi(x,x) \geq 0$. En particulier, pour $x = (1,-3)$ on a*

     $$\phi(1,-3) \geq 0 \Rightarrow (a-9)1^2 + 0^2 \geq 0 \Rightarrow a \geq 9$$

     donc $a \geq 9$ est une condition nécessaire pour que ϕ soit positive. De plus, elle est suffisante puisque si $a \geq 9$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $\phi(x,x) \geq 0$ comme somme de termes positifs.
   - *ϕ est définie si $\phi(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = (0,0)$. Pour $a \geq 9$ on a (somme de termes positifs)*

     $$\phi(x,x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a-9)x_1^2 = 0 \\ 3x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 9 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = 9 \\ x_2 = -3x_1 \end{cases}$$

     On en déduit que ϕ est positive et définie si et seulement si $a > 9$.

   Conclusion : ϕ est un produit scalaire si et seulement si $a > 9$.

5. *Par calcul direct*

$$\phi(v_1, v_2) = 13 \times 1 \times 1 + 3 \times 1 \times (-4) + 3 \times 1 \times 1 + 1 \times (-4) = 0$$

   donc v_1 et v_2 sont orthogonaux pour le produit scalaire ϕ.

6. *Soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,*

$$\begin{aligned}
x \in \{v_1\}^\perp &\Leftrightarrow \phi(x, v_1) = 0 \\
&\Leftrightarrow 13x_1 + 3x_1 + 3x_2 + x_2 = 0 \\
&\Leftrightarrow x_2 = -4x_1.
\end{aligned}$$

   On en déduit que $\{v_1\}^\perp = Vect(v_2)$.

7. *La base $\mathcal{B}$ est déjà orthogonal, il nous suffit donc de la normaliser.*

$$\|v_1\| = \sqrt{\phi(v_1, v_1)} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}, \quad \|v_2\| = \sqrt{\phi(v_2, v_2)} = \sqrt{5}.$$

On en déduit la base orthonormale $\widetilde{B} = \{\widetilde{v_1}, \widetilde{v_2}\}$ avec

$$\widetilde{v_1} = \left(\frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{1}{2\sqrt{5}}\right), \quad v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-4}{\sqrt{5}}\right).$$

Exercice 3. (8 *points*)

On considère $E = \mathbb{R}_2[X]$. Pour tout $P, Q \in E$, on pose

$$\langle P, Q\rangle = P(-1)Q(-1) + 2P(0)Q(0) + P(1)Q(1).$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

   On notera $\| \cdot \|$ la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
2. Calculer la norme du polynôme constant $P = 1$. On notera $P_0 = \frac{1}{\|1\|}$.
3. Montrer que le polynôme $P = X$ est orthogonale à P_0 pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
4. Calculer $||X||$. On notera $P_1 = \frac{X}{\|X\|}$.
5. On pose $Q = X^2 - \langle X^2, P_0\rangle P_0 - \langle X^2, P_1\rangle P_1$ et $P_2 = \frac{Q}{\|Q\|}$. Calculer les coefficients de P_2.
6. Montrer que (P_0, P_1, P_2) forme une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Réponse. 1. *Montrons que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive :*

- *Forme : l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ va de E, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, dans $\mathbb{R}$.*
- *Symétrique : Pour tout $P, Q \in E$:*

$$\langle Q, P\rangle = Q(-1)P(-1)+2Q(0)P(0)+Q(1)P(1) = P(-1)Q(-1)+2P(0)Q(0)+P(1)Q(1) = \langle P, Q\rangle.$$

- *Bilinéaire : Pour tout $P, \tilde{P}, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{aligned}\langle P + \lambda\tilde{P}, Q\rangle &= (P(-1) + \lambda\tilde{P}(-1))Q(-1) + 2(P(0) + \lambda\tilde{P}(0))Q(0) + (P(1) + \lambda\tilde{P}(1))Q(1)\\ &= P(-1)Q(-1) + 2P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + \lambda(\tilde{P}(-1)Q(-1) + 2\tilde{P}(0)Q(0) + \tilde{P}(1)Q(1)\\ &= \langle P, Q\rangle + \lambda\langle \tilde{P}, Q\rangle.\end{aligned}$$

  Comme $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique, on en déduit qu'elle est bilinéaire.
- *Positive : Pour tout $P \in E$:*

$$\langle P, P\rangle = P(-1)^2 + 2P(0)^2 + P(1)^2 \geq 0$$

  comme somme de termes positifs.
- *Définie :*

$$\langle P, P\rangle = 0 \Leftrightarrow P(-1)^2 + 2P(0)^2 + P(1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(-1) = 0 \\ P(0) = 0 \\ P(1) = 0 \end{cases}.$$

  En d'autres termes, $\langle P, P\rangle = 0$ si et seulement si P admet trois racines distinctes -1, 0 et 1. Or les éléments de P sont des polynômes de degrée ≤ 2 donc le seul élément de P qui admet plus de deux racines est le polynôme nul. Ainsi

$$\langle P, P\rangle = 0 \Leftrightarrow P = 0.$$

2. *Pour $P=1$ on a*

$$\|P\| = \sqrt{\langle P, P\rangle} = \sqrt{1\times 1 + 2\times 1\times 1 + 1\times 1} = 2$$

donc $P_0 = \frac{1}{2}$.

3. *Calculons le produit scalaire :*

$$\langle X, \frac{1}{2}\rangle = -1\times\frac{1}{2} + 2\times 0\times\frac{1}{2} + 1\times\frac{1}{2} = 0$$

donc X et P_0 sont orthogonaux.

4. *On calcule*

$$\|X\| = \sqrt{\langle X, X\rangle} = \sqrt{-1\times(-1) + 2\times 0\times 0 + 1\times 1} = \sqrt{2}$$

donc $P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}X$.

5. *D'une part*

$$\langle X^2, P_0\rangle = (-1)^2\times\frac{1}{2} + 2\times 0^2\times\frac{1}{2} + 1^2\times\frac{1}{2} = 1$$

et d'autre part

$$\langle X^2, P_1\rangle = (-1)^2\times\frac{1}{\sqrt{2}}(-1) + 2\times 0^2\times\frac{1}{\sqrt{2}}0 + 1^2\times\frac{1}{\sqrt{2}}1 = 0.$$

On en déduit que

$$Q = X^2 - 1\times\frac{1}{2} - 0\times P_1 = X^2 - \frac{1}{2}.$$

De plus,

$$\|Q\| = \sqrt{\langle Q, Q\rangle} = \sqrt{\left((-1)^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 1$$

donc

$$P_2 = X^2 - \frac{1}{2}.$$

6. *Par construction on sait que les polynômes P_0, P_1 et P_2 sont de norme 1 et on sait déjà que $P_0 \perp P_1$. Vérifions que P_2 est orthogonal à P_0 et P_1 :*

$$\langle P_2, P_0\rangle = \left((-1)^2 - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2} + 2\left(0 - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2} = 0.$$

$$\langle P_2, P_1\rangle = \left((-1)^2 - \frac{1}{2}\right)\frac{-1}{\sqrt{2}} + 2\left(0 - \frac{1}{2}\right)\frac{0}{\sqrt{2}} + \left(1 - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.$$

On en déduit que (P_0, P_1, P_2) est une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$, c'est donc une base puisque $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$. *Ses éléments sont tous de norme 1 et orthogonaux deux à deux : c'est une base orthonormée.*