# Algèbre linéaire et bilinéaire

*Devoir surveillé 3* | *3 juin 2022*

Sujet pour les groupes de TD : 1, 3 et 4.

◁ Consignes ▷

<u>Durée : 90 mn</u>

► Les documents et les supports électroniques sont interdits.
► L'épreuve est composée de 4 exercices indépendants.

◁ Sujet de l'épreuve ▷

**Exercice 1.** (*xx points*)

Soit $E = \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{R})$. Pour tout $f, g \in E$, on pose

$$\varphi(f,g) = f(a)g(a) + \int_a^b f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que $\varphi$ est un produit scalaire sur $E$.

**Exercice 2.** (*xx points*)

On considère $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni de son produit scalaire canonique, i.e. :

$$\forall P = \sum_{i=0}^{3} a_i X^i \in \mathbb{R}_3[X] \text{ et } \forall Q = \sum_{i=0}^{3} b_i X^i \in \mathbb{R}_3[X]$$

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{i=0}^{3} a_i b_i$$

et de sa base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$.

1) Vérifier que $\langle . , . \rangle$ est un produit scalaire sur $E$.

2) Déterminer la matrice de $\langle . , . \rangle$ dans la base $\mathcal{B}$.

3) Déterminer la matrice de $\langle . , . \rangle$ dans la base $\mathcal{B}' = (1, 1+X, 1+X^2, 1+X^3)$ de $E$.

4) Soit $F$ le sous-ensemble de $E$ définit par

$$F = \{P \in E \ : \ P(0) = P(-1) = P(1) = 0\}$$

   a) Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

   b) Déterminer une base de $F$.

c) Déterminer $F^\perp$. On rappelle que si $F = Vect(P_1, \dots, P_n)$, alors

$$F^\perp = \{P \in E \ : \ \forall i \in [\![1, n]\!] \ ; P \ \perp P_i\}$$

**Exercice 3.** *(xx points)*

On travaille dans $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique i.e. :
$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \forall y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Montrer que

$$n^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{i}\right)^2 \leq \frac{n^2(n+1)}{2}$$

Indication : penser à l'inégalité de SCHWARZ,

$$\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle$$

**Exercice 4.** *(xx points)*

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Considérons la forme sur $\mathbb{R}^2$ suivante

$$\varphi(x, y) = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + x_1 y_1 + x_2 y_2 \qquad \forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

a) Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$\varphi(x, y) = X^T A Y \quad \text{avec} \quad X = M_{\mathcal{B}}(x) \ \text{ et } \ Y = M_{\mathcal{B}}(y)$$

b) Vérifier que $\varphi$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

c) Donner la matrice de $\varphi$ dans la base canonique $\mathcal{B}$. $\mathcal{B}$ est-elle orthonormale selon $\varphi$ ?

d) On rappelle que la norme euclidienne associée à un produit scalaire $\varphi$ est définie par

$$\|x\| = \sqrt{\varphi(x, x)}$$

Expliciter la norme euclidienne $\|.\|$ associée à $\varphi$. Calculer la norme du vecteur $e_1 = (1, 0)$.