ALGÈBRE LINÉAIRE ET BILINÉAIRE

Devoir surveillé 2 | 7 mai 2024

◁ Consignes ▷

<u>Durée : 60 mn</u>

▶ Les documents et les supports électroniques sont interdits.
▶ L'épreuve est composée de 2 exercices indépendants.
▶ Le barème est à titre indicatif.

◁ Sujet de l'épreuve ▷

Exercice 1. (12 *points*)

On veut résoudre le système différentiel linéaire non homogène à coefficients constants :

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) + t \\ y'(t) = x(t) - t^2 \end{cases}$$

Les inconnues sont les fonctions x et y de la variable réelle $t \in \mathbb{R}$.

1) Ecrire ce système sous la forme matricielle

$$X'(t) = AX(t) + B(t) \qquad (I)$$

en précisant les différentes matrices.

2) Calculer le polynôme caractéristique de A et donner son expression sous forme factorisée.
En déduire que le spectre de A est $Sp(A) = \{-1, 1\}$.

3) Déterminer les sous-espaces propres de A.

4) Par un changement de variable, montrer que le système (I) est équivalent à un système de la forme

$$Y'(t) = DY(t) + S(t) \qquad (II)$$

où D est une matrice diagonale et $S(t)$ est une matrice unicolonne à expliciter.

5) Résoudre le système (II).

6) En déduire $X(t)$, la solution générale du système (I).

7) Determiner la solution unique $X(t)$ du système (I) vérifiant la condition initiale

$$X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 2. (8 *points*)

On considère la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$X_{n+1} = AX_n + B$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad ; \quad X_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad X_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \text{ est donnée}$$

1) Calculer la matrice X, où $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, solution du système $X = AX + B$.

2) On note $U_n = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et on pose $U_n = X_n - X$.

   a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} = AU_n$.
   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n = A^n U_0$.
   c) Calculer A^n.
   d) Donner en fonction de n, u_0 et v_0 l'expression des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   e) Etudier $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$.

3) En déduire que la suite de matrices colonnes $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers X.