CY TECH

2024/2025
Semestre 2 – PréIng 2
Mardi 18 Mars 2024

Algèbre Linéaire et Bilinéaire

CC1

◁ Consignes ▷

Durée : 60 mn

- Les documents et les supports électroniques sont interdits.
- L'épreuve est composée d'exercices indépendants.
- Le barème est à titre indicatif.
- La qualité de la rédaction et la rigueur des justifications seront prises en compte dans la notation.

◁ Sujet de l'épreuve ▷

Exercice 1 Diagonalisation

1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorphisme. Rappeler la définition de f *est diagonalisable.*
2. Rappeler la définition de λ *est une valeur propre de* f.
3. Soit $A := \begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, montrer qu'elle représente un endomorphisme non inversible. En déduire, sans calcul, une valeur propre de A.
4. Caculer P_A le polynôme caractéristique de A. En déduire que A est diagonalisable.
5. Diagonaliser A : trouver une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.
6. Calculer P^{-1}.

Exercice 2 Trigonalisation

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = (2x - y, x)$$

On notera $\mathcal{B}_C$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, i.e. $\mathcal{B}_C = (e_1, e_2)$; avec $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$.

1. Écrire la matrice, notée B, de f dans la base canonique $\mathcal{B}_C$.
2. Calculer P_B, le polynôme caractéristique de B. En déduire que B est trigonalisable.
3. Trigonaliser B: trouver une matrice inversible P telle que $B = PTP^{-1}$ avec:
$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$
où a et b sont des réels à déterminer. <u>On ne calculera pas P^{-1}.</u>
4. Montrer que $T = D_2 + N$ où D_2 est une matrice diagonale, et N une matrice nilpotente, telles que D_2 et N commutent.