

ALGÈBRE LINÉAIRE ET BILINÉAIRE

DS1

◁ Consignes ▷

Durée : 60 mn

- ▶ Les documents et les supports électroniques sont interdits.
- ▶ L'épreuve est composée d'exercices indépendants.
- ▶ Le barème est à titre indicatif.
- ▶ La qualité de la rédaction et la rigueur des justifications seront prises en compte dans la notation.

◁ Sujet de l'épreuve ▷

Exercice 1 (4pts)

1. Donner la définition de la diagonalisabilité
2. Énoncé une condition nécessaire et suffisante de trigonalisabilité

Exercice 2 (8pts)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique et le spectre de A .
2. Déterminer une base de chaque sous-espace propre de A .
3. Justifier que A est diagonalisable.
4. Donner une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.

Exercice 3 (5pts)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de A .
2. Déterminer une base du sous-espace propre de A .
3. Trigonaliser la matrice A .

Exercice 4 (3pts)

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de A .
2. La matrice A est-elle trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Justifier.
3. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$? Justifier.