Algèbre linéaire
et bilinéaire
Préing 2, 2023-2024

Devoir surveillé n° 1

MEF – MI2

27 mars 2024

Consignes :

- Le sujet comporte 3 exercices qui peuvent être faits dans n'importe quel ordre.
- Les réponses doivent être justifiées soigneusement et les calculs suffisamment détaillés.
- L'usage de tout appareil électronique (calculatrice, téléphone, smartwatch, etc) est interdit.

Durée : 1 heure.

Barème : 20 points (répartition indicative).

Exercice 1 (5 pts). *Questions de cours.* Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel de dimension finie et soit f un endomorphisme de E.

1. Donner la définition des termes suivants :
   - **a.** valeur propre de f.
   - **b.** polynôme caractéristique de f.
   - **c.** sous-espace propre de f associé à une valeur propre λ.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit diagonalisable.

Exercice 2 (8 pts). Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -7 \\ 1 & 3 & -5 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique et le spectre de A.
2. En déduire que A est diagonalisable.
3. Déterminer une base de chaque sous-espace propre de A.
4. En déduire des matrices D et P telles que $A = PDP^{-1}$.

Exercice 3 (7 pts). Soit $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de B et montrer que le spectre de B est formé d'une valeur propre simple et d'une valeur propre double.
2. Déterminer une base de chaque sous-espace propre de B.
3. La matrice B est-elle diagonalisable ?
4. Trigonaliser la matrice B.