ALGÈBRE LINÉAIRE ET BILINÉAIRE

Devoir surveillé 1 | *Groupe A*

16 mars 2023

◁ Consignes ▷

Durée : 90 mn

► Les documents et les supports électroniques sont interdits.
► L'épreuve est composée de 5 exercices indépendants.
► Le barème est à titre indicatif.

◁ Sujet de l'épreuve ▷

Exercice 1. (3 *points*)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^2)$ défini par $f(x,y) = (x-y, 2x-y)$.

En utilisant la formulation vectorielle, sans faire usage du polynôme caractéristique de f :

a) Trouver tous les éléments propres de f, pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

b) Trouver tous les éléments propres de f, pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Exercice 2. (8 *points*)

Soit $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

1) a) Calculer le polynôme caractéristique de A et donner son expression sous forme factorisée. En déduire le spectre de A.

b) La matrice A est-elle inversible ? Justifier.

c) Pour chaque valeur propre de A, déterminer le sous-espace propre correspondant. On donnera une base de chaque sous-espace propre.

d) Diagonaliser A, en explicitant les matrices P (inversible) et D (diagonale) telles que :

$$A = PDP^{-1}$$

Ne pas calculer P^{-1}.

2) On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

Exercice 3. (3 *points*)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Répondre par VRAI ou FAUX en justifiant votre réponse.

a) Si A est diagonalisable, alors A est inversible.

b) Si A est inversible, alors A est diagonalisable.

c) Si A est diagonalisable, alors A^2 est diagonalisable.

Exercice 4. (3 *points*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que A et A^T ont même polynôme caractéristique.
2) A et A^T ont-elles les mêmes valeurs propres ?
3) Démontrer par un contre-exemple que A et A^T, avec $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, n'ont pas les mêmes sous-espaces propres.

Exercice 5. (4 *points*)

Considérons l'endomorphisme f de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} & \longmapsto & \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \end{array}$$

a) Déterminer le spectre de f.
b) Déterminer les sous-espaces propres de f.