CY TECH

2021/2022
Département Mathématiques
PreIng-2

Algèbre linéaire et bilinéaire

Devoir surveillé 1 | *31 mars 2022*

◃ Consignes ▹

Durée : 90 mn

- Les documents et les supports électroniques sont interdits.
- L'épreuve est composée de quatre exercices indépendants.

◃ Sujet de l'épreuve ▹

Exercice 1. (4.5 *points*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Soit $a \in \mathbb{R}$.

   a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que λ est valeur propre de A, si et seulement si, $\lambda - a$ est valeur propre de $A - aI_n$.

   b) En déduire le spectre de $A - aI_n$ en fonction du spectre de A.

2) Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice semblable à A.

   a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que λ est valeur propre de A si, et seulement si, λ est valeur propre de B. En déduire $Sp(A)$ en fonction de $Sp(B)$.

   b) La réciproque est-elle vraie : deux matrices de même spectre sont-elles semblables ?

   On pourra considérer la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2. (1.5 *points*)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

1) Calculer le polynôme caractéristique de A.

2) Sans calculer les sous-espaces propres de A, montrer que A n'est pas diagonalisable.

Exercice 3. (7.5 *points*)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

1) a) Calculer le polynôme caractéristique de A. En déduire que $Sp(A) = \{0, 1, 2\}$.

   b) La matrice A est-elle inversible ?

   c) Justifier que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

d) Pour chaque valeur propre de A, déterminer le sous-espace propre correspondant. On donnera une base de chaque sous-espace propre.

e) Diagonaliser A, en explicitant les matrices P, D (diagonale) et P^{-1} telles que :

$$A = PDP^{-1}$$

Ne pas calculer P^{-1}.

2) On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

Exercice 4. (*7 points*)

Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

1) Calculer le polynôme caractéristique de A. En déduire que $Sp(A) = \{1\}$.

2) Justifier que A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

3) Trigonaliser A en explicitant les matrices P, T (triangulaire supérieure) et P^{-1} telles que :

$$A = PTP^{-1}$$

4) Calculer P^{-1}.