	Cycle préparatoire 2$^{\text{ème}}$ année **Devoir surveillé 1** *Karam Fayad, Khaoula Guezguez, Hassan Maatouk, Thi-Hien Nguyen*	
	Matière : **Algèbre linéaire et bilinéaire**	*Date* : **Vendredi 20 mars 2020**
	Appareils électroniques et documents interdits	*Durée* : **2 heures**
		Nombre de pages : **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte quatre exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée, et tout calcul doit être détaillé.

Exercice 1.

Soit a un réel. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a+1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 3 & -a-1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A et le factoriser.
2. (a) Pour quelles valeurs de a la matrice A possède-t-elle trois valeurs propres distinctes ?
   (b) Que peut-on affirmer dans ce cas ? Justifier.
3. Pour les valeurs suivantes de a, diagonaliser la matrice A si elle est diagonalisable. Sinon, la trigonaliser :
   (a) $a = -1$.
   (b) $a = 2$.

Exercice 2.

Pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on pose

$$\varphi(P) = X(X-1)P' - 2XP.$$

1. Montrer que φ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Diagonaliser l'endomorphisme φ, c.-à-d. expliciter une base de $\mathbb{R}_2[X]$ dans laquelle la matrice de φ est diagonale.
4. Montrer que $\mathbb{R}_2[X] = \mathrm{Ker}(\varphi) \oplus \mathrm{Im}(\varphi)$.

Exercice 3.

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & -1 & f \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

où $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6$.

1. Montrer que : $\mathrm{rg}(A - I_4) = 2 \Leftrightarrow a = 0$.
2. De même, trouver une condition nécessaire et suffisante sur (a, b, c, d, e, f) pour que $\mathrm{rg}(A + I_4) = 2$.
3. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur (a, b, c, d, e, f) pour que A soit diagonalisable.

Exercice 4.
On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Trouver une matrice inversible P et une matrice triangulaire supérieure T telles que $A = PTP^{-1}$.
2. En écrivant $T = \alpha I_2 + N$ avec α un réel à déterminer et N une matrice vérifiant $N^2 = 0$, calculer T^n pour tout entier naturel n.
3. En déduire A^n pour tout entier naturel n.