DS 1 - 20 mars 2020

Algèbre linéaire et bilinéaire.

Exercice 1.

$a \in \mathbb{R}$. $A = \begin{pmatrix} -1 & a+1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 3 & -a-1 & 2 \end{pmatrix}$

1) $P_A(X) = \begin{vmatrix} -1-X & a+1 & 0 \\ 1 & a-X & 1 \\ 3 & -a-1 & 2-X \end{vmatrix}$

$= -\left[(X+1)(a+1) - 3(a+1)\right] + (2-X)\left[(X-a)(X+1) - a - 1\right]$

$= -(a+1)(X-2) + (2-X)(X^2 + X - aX - 2a - 1)$

$= (2-X)(a+1 + X^2 - aX + X - 2a - 1)$

$= (2-X)(X^2 - aX + X - a)$

$= -(X-2)(X^2 - (a-1)X - a)$

$= -(X-2)(X-a)(X+1)$

$\boxed{Sp(A) = \{2, a, -1\}.}$

2) a) Si $a \neq 2$ et $a \neq -1$, A possède 3 valeurs propres distinctes.

b) Dans ce cas, A est diagonalisable (car tous les sous-espaces propres sont de dimension 1, égale à la multiplicité des valeurs propres).

3) a) on suppose $a = -1$:

$Sp(A) = \{-1, 2\}$ avec -1 : double
2 : simple

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$E_2(A)$: $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(A) \Leftrightarrow (A - 2I_3)V = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 3y \end{cases} \Leftrightarrow V = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 3y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ainsi $\boxed{E_2(A) = \mathrm{vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}$

$E_{-1}(A)$. $V \in E_{-1}(A) \Leftrightarrow (A + I_3)V = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x + z = 0$$

$$\Leftrightarrow V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ainsi $\boxed{E_{-1}(A) = \mathrm{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)}$

de dimension 2, ainsi A est diagonalisable et $A = PDP^{-1}$

avec $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) $a = 2$

$Sp(A) = \{-1, 2\}$ avec -1 : simple, 2 : double. $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

$E_{-1}(A)$: $V \in E_{-1}(A) \iff (A + I_3)V = 0$

$\iff \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \iff V = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\boxed{E_{-1}(A) = \text{vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$

$E_2(A)$: $V \in E_2(A) \iff (A - 2I_3)V = 0$

$\iff \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\iff x = y = -z$

$\iff V = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\boxed{E_2(A) = \text{vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$ de dimension 1, donc A n'est pas diagonalisable

On complète le vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ en une base de

$\mathrm{Ker}\left((A-2I_3)^2\right)$: le sous-espace caractéristique

$V \in \mathrm{Ker}\left((A-2I_3)\right)^2 \Leftrightarrow (A-2I_3)^2 V = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}12 & -9 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ -12 & 9 & -3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow 4x - 3y + z = 0$$

on choisit donc un vecteur du plan d'équation $4x-3y+z=0$, qui est non colinéaire à $(1,1,-1)$

Par exemple, le vecteur $(0,1,3)$

$$\mathrm{Ker}\left((A-2I_3)^2\right) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}\right)$$

et $A = PTP^{-1}$ avec $P = \begin{array}{c}\begin{matrix} u & v & w\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix}\end{array}$

et $T = \begin{array}{cc} \begin{matrix} Au & Av & Aw\end{matrix} & \\ \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & \alpha\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} & \begin{matrix} u\\ v\\ w\end{matrix}\end{array}$

Calcul de α : $Aw = \alpha v + 2w$

$$\Leftrightarrow (A-2I_3)\, w = \alpha v \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-3 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 3 & -3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}3\\3\\-3\end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 3}$$

Exercice 2. $\varphi(P) = X(X-1)P' - 2XP$

1) Soit $P = a + bX + cX^2$

$\varphi(P) = X(X-1)(b+2cX) - 2X(a+bX+cX^2)$

$= bX^2 + 2cX^3 - bX - 2cX^2 - 2aX - 2bX^2 - 2cX^3$

$= (-b-2a)X + (-b-2c)X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$.

ainsi $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$.

De plus, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall$ $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$,

$\varphi(\lambda P + Q) = X(X-1)(\lambda P + Q)' - 2X(\lambda P + Q)$

$= X(X-1)(\lambda P' + Q') - 2X(\lambda P + Q)$

$= \lambda\left[X(X-1)P' - 2XP\right] + \left[X(X-1)Q' - 2XQ\right]$

$= \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)$

ainsi $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$.

2) Soit A la matrice de φ dans la base $(1, X, X^2)$

$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \varphi(1) & \varphi(X) & \varphi(X^2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array} \end{array}$$

3) Diagonalisons la matrice A.

$$P_A(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} -X & 0 & 0 \\ -2 & -1-X & 0 \\ 0 & -1 & -2-X \end{vmatrix} = -X(X+1)(X+2)$$

$Sp(A) = \{0, -1, -2\}$.

$E_0(A)$: $V \in E_0(A) \iff AV = 0 \iff \begin{cases} 2x + y = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = -2z \end{cases}$

(6)

ainsi $\boxed{E_0(A) = \text{vect}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}}$ $\Leftrightarrow E_0(\varphi) = \text{vect}(1-2X+X^2)$

$\underline{E_{-1}(A)}$: $V \in E_{-1}(A) \Leftrightarrow (A+I_3)V = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&0&0\\-2&0&0\\0&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y+z = 0 \end{cases}$

ainsi $\boxed{E_{-1}(A) = \text{vect}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}}$ $\Leftrightarrow E_{-1}(\varphi) = \text{vect}(X-X^2)$

$\underline{E_{-2}(A)}$: $V \in E_{-2}(A) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (A+2I_3)V = 0$ $\begin{pmatrix}2&0&0\\-2&1&0\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$

ainsi $\boxed{E_{-2}(A) = \text{vect}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}$ $\Leftrightarrow E_{-2}(\varphi) = \text{vect}(X^2)$

d'où $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$

et $D = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$

la base $(1-2X+X^2,\ X-X^2,\ X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ formée de vecteurs propres de φ. la matrice de φ dans cette base est D

4) $\operatorname{Ker}\varphi = E_0(\varphi)$ de dimension 1

Par le thm du rang, $\operatorname{Im}\varphi$ est de dimension 2.

$\operatorname{Im}\varphi$ est engendré par $(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2))$.

Une base de $\operatorname{Im}\varphi$ est par exemple $(\varphi(1), \varphi(X^2))$

c.à.d la famille $(-2X, -2X^2)$

ou (X, X^2)

d'autre part $\operatorname{Ker}\varphi + \operatorname{Im}\varphi = \operatorname{vect}(1-2X+X^2) + \operatorname{vect}(X, X^2)$

$= \operatorname{vect}(1-2X+X^2, X, X^2)$

or $(1-2X+X^2, X, X^2)$ est libre ($\Leftrightarrow$ engendre $\mathbb{R}_2(X)$)

d'où $\operatorname{Ker}\varphi + \operatorname{Im}\varphi = \operatorname{vect}(1-2X+X^2, X, X^2) = \mathbb{R}_2[X]$.

on a donc : $\dim(\operatorname{Ker}\varphi) + \dim(\operatorname{Im}\varphi) = 3 = \dim \mathbb{R}_2(X)$

$\operatorname{Ker}\varphi + \operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}_2[X]$.

D'où $\boxed{\mathbb{R}_2[X] = \operatorname{Im}\varphi \oplus \operatorname{Ker}\varphi}$.

Exercice 3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & -1 & f \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1) $A - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & -2 & f \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

si $a=0$: $A - I_4$ contient 2 colonnes nulles, donc $rg(A-I_4) = rg\left(\underbrace{\begin{pmatrix} b \\ d \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ e \\ f \\ -2 \end{pmatrix}}_{\text{famille de 2 vecteurs linéairement indépendants}}\right) = 2.$

si $a \neq 0$, $\exists$ un mineur de taille 3 non nul :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & -2 & f \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4a \neq 0$$

$\Rightarrow rg(A-I_4) \geqslant 3$

or $rg(A-I_4) < 4$ car $\det(A-I_4) = 0$

d'où $rg(A-I_4) = 3 \neq 2$.

ainsi $\boxed{rg(A-I_4) = 2 \iff a = 0}$

2) $A+I_4 = \begin{pmatrix} 2 & a & b & c \\ 0 & 2 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ échelonnée.

si $f=0$, A contient 2 lignes nulles et

$rg(A) = rg\left((2,a,b,c),(0,2,d,e)\right) = 2.$

si $f \neq 0$, $rg(A+I_4) = 3 \neq 2$

ainsi $\boxed{rg(A+I_4) = 2 \iff f = 0}$

3) $Sp(A) = \{1, -1\}$ 2 valeurs propres doubles.

A diagonalisable $\iff \dim(\mathrm{Ker}(A - I_3)) = \dim(\mathrm{Ker}(A + I_3)) = 2$

$\iff rg(A - I_3) = rg(A + I_3) = 2$

$\iff a = f = 0$

[Rq : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda I_3)) + rg(A - \lambda I_3) = 4$]. par le thm du rang.

Conclusion : $\boxed{A \text{ diagonalisable} \iff a = f = 0}$.

Exercice 4. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1) $P_A(X) = \begin{vmatrix} 3-X & -1 \\ 1 & 1-X \end{vmatrix} = (X-1)(X-3) + 1 = X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2$.

$V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_2(A) \iff (A - 2I_2)V = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\iff x = y$

ainsi $E_2(A) = \mathrm{vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

puis $\mathrm{Ker}((A - 2I_2)^2) = \mathbb{R}^2 = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

ainsi $A = PTP^{-1}$ avec $P = \begin{array}{cc} u & v \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

et $T = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} Au & Av \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} u \\ v \end{array}$

$Av = \alpha u + 2v \iff (A - 2I_2)v = \alpha u$

$\iff \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \alpha = 1$

Conclusion :

$A = PTP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

2) $T = 2I_2 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ vérifiant $N^2 = 0$

$$T^n = (2I_2 + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k (2I_2)^{n-k} \quad \left[\text{car } 2I_2 \text{ et } N \text{ commutent}\right]$$

$$= \underbrace{(2I_2)^n}_{\text{pour } k=0} + \underbrace{nN(2I_2)^{n-1}}_{\text{pour } k=1} \quad (\forall k > 1, N^k = 0)$$

$$= 2^n I_2 + 2^{n-1} nN = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n2^{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

3) $A^n = (PTP^{-1})^n = PT^nP^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} + 2^n \\ 2^n & n2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} n2^{n-1} + 2^n & -n2^{n-1} \\ n2^{n-1} & 2^n - n2^{n-1} \end{pmatrix} = \boxed{2^{n-1} \begin{pmatrix} n+2 & -n \\ n & 2-n \end{pmatrix}}$$