EISTI	Cycle préparatoire 2ème année Devoir surveillé 1 *Khalid El Amine, Abdessalam El Janati, Karam Fayad, Thi Hien Nguyen*	
	Matière : **Algèbre linéaire et bilinéaire**	*Date* : **Vendredi 15 mars 2019**
	Appareils électroniques et documents interdits	*Durée* : **2 heures**
		Nombre de pages : **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte quatre exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. (6.5 points)
Pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on note

$$f(P) = (X^2-1)P'' + (2X+1)P'.$$

1. Montrer que f définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Donner la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. En déduire les valeurs propres de f. On les notera λ_1, λ_2 et λ_3 avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.
4. Pour $i \in \{1,2,3\}$, trouver un polynôme non nul $P_i \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $f(P_i) = \lambda_i P_i$.
5. Justifier que la famille $\mathcal{C} = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
6. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$.
7. (a) Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}(P_2, P_3)$.
   (b) $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$? Justifier.

Exercice 2. (4 points)
Soit a un réel. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a+1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 3 & -1-a & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que a est une valeur propre de A.
2. Calculer le polynôme caractéristique de A et le factoriser.
3. Discuter, suivant les valeurs de a, le rang de la matrice $A - aI_3$.

Exercice 3. (3 points)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont dites semblables s'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$.

1. Montrer que si deux matrices sont semblables, alors elles ont même polynôme caractéristique.
2. Trouver deux matrices A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ayant même polynôme caractéristique, mais qui ne sont pas semblables.

Exercice 4. (6.5 points)
Soit $n > 1$ un entier. On rappelle que la trace d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notée $tr(A)$, est égale à la somme des coefficients diagonaux de A, et que l'application trace est linéaire.

Soit A une matrice fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{tr}(A) \neq 0$. On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & \mathrm{tr}(A)M - \mathrm{tr}(M)A \end{array}$$

et on note F l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que la matrice A est un vecteur propre de f associé à une valeur propre α que l'on déterminera.
3. Montrer que le sous-espace propre de f associé à α est de dimension 1.
4. Montrer que F est le sous-espace propre de f associé à la valeur propre $\mathrm{tr}(A)$.
5. Montrer que $F = \mathrm{Im}(f)$ et déterminer la dimension de F.