karam.fayad@eisti.eu

Corrigé DS1 Algèbre linéaire et bilinéaire - Prépa 2 (15/03/2019)

Exercice 1 .

1. Soit $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$, alors $f(P) = (b - 2c) + (2b + 2c)X + 6cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$.
   Montrons que f est linéaire : soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(P, Q) \in \mathbb{R}_2[X]^2$, on a alors

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= (X^2 - 1)(\lambda P + Q)'' + (2X + 1)(\lambda P + Q)' \\ &= (X^2 - 1)(\lambda P'' + Q'') + (2X + 1)(\lambda P' + Q') \\ &= \lambda[(X^2 - 1)P'' + (2X + 1)P'] + (X^2 - 1)Q'' + (2X + 1)Q' \\ &= \lambda f(P) + f(Q) \end{aligned}$$

2. On a : $f(1) = 0$, $f(X) = 1+2X$ et $f(X^2) = -2+2X+6X^2$. Ainsi la matrice de f dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

3. La matrice A étant triangulaire supérieure, il est clair que son polynôme caractéristique (ou celui de f) est $P_A(X) = -X(X - 2)(X - 6)$. Ainsi les valeurs propres de f sont $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 6$. Il s'agit de trois valeurs propres simples.
4. Il suffit de prendre

$$\boxed{P_1 = 1}$$

   Soit $P_2 = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $f(P_2) = \lambda_2 P_2 = 2P_2$, alors $(f - 2\mathrm{id})(P) = 0$. En écriture matricielle, on obtient

$$(A - 2I_3)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow c = 0 \text{ et } b = 2a$$

   d'où $P_2 = a(1 + 2X)$. On prend par exemple

$$\boxed{P_2 = 1 + 2X}$$

   Soit $P_3 = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $f(P_3) = \lambda_3 P_3 = 6P_3$, alors $(f - 6\mathrm{id})(P) = 0$. En écriture matricielle, on obtient

$$(A - 6I_3)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow c = -4a \text{ et } b = -2a$$

   d'où $P_3 = a(1 - 2X - 4X^2)$. On prend par exemple

$$\boxed{P_3 = 1 - 2X - 4X^2}$$

5. Les trois polynômes P_1, P_2 et P_3 sont non nuls et de degrés deux à deux distincts, ils forment ainsi une famille libre dans $\mathbb{R}_2[X]$. Comme $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension 3, on déduit que la famille $\mathcal{C} = (P_1, P_2, P_3)$ en est une base.
6. Par construction de P_1, P_2 et P_3, la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

7. (a) Remarquons d'abord que comme P_2 et P_3 ne sont pas colinéaires, alors $\text{vect}(P_2, P_3)$ est de dimension 2. D'autre part, comme $\text{rg}(A) = \text{rg}(f) = 2$, on déduit que $\text{Im}(f)$ est de dimension 2.
On a $f(P_2) = 2P_2$, ainsi $2P_2 \in \text{Im}(f)$ d'où $P_2 \in \text{Im}(f)$ car $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$. De même pour P_3.
Comme P_2 et P_3 appartiennent à $\text{Im}(f)$ alors $\text{vect}(P_2, P_3) \subset \text{Im}(f)$. Par égalité de dimension, on conclut que $\text{vect}(P_2, P_3) = \text{Im}(f)$.

   (b) $\text{Ker}(f)$ est de dimension 1, et $P_1 \in \text{Ker}(f)$ donc $\text{Ker}(f) = \text{vect}(P_1)$.
On a : $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \text{vect}(P_1) \cap \text{vect}(P_2, P_3) = \{0\}$ car (P_1, P_2, P_3) est libre.
D'autre part, le théorème du rang assure que $\dim(\text{Im } f) + \dim(\text{Ker } f) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$.
Ainsi $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Remarque : comme f possède trois valeurs propre simples, on sait que f est diagonalisable et que $\mathbb{R}_2[X]$ est somme directe des sous-espaces propres, ainsi

$$\mathbb{R}_2[X] = \text{vect}(P_1) \oplus \text{vect}(P_2) \oplus \text{vect}(P_3) = \text{vect}(P_1) \oplus \text{vect}(P_2, P_3) = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f).$$

Exercice 2 .

1. On a $\det(A - aI_3) = \begin{vmatrix} -1-a & 1+a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1-a & 2-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2-a & 2-a \end{vmatrix} = 0$ en faisant l'opération $c_2 \leftarrow c_2 + c_1$ puis en remarquant que $c_2 = c_3$.
Ainsi a est une valeur propre de A.

2. $P_A(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} -1-X & a+1 & 0 \\ 1 & a-X & 1 \\ 3 & -1-a & 2-X \end{vmatrix} = -(X+1)(X^2-(a+2)X+3a+1)-(a+1)(-X-1)$
en développant par rapport à la première ligne par exemple.
On factorise par $X + 1$, on obtient

$$\begin{aligned} P_A(X) &= -(X+1)(X^2 - (a+2)X + 2a) \\ &= -(X+1)(X-2)(X-a) \end{aligned}$$

3. On sait déjà que $\det(A - aI_3) = 0$, ainsi la matrice $A - aI_3$ n'est pas inversible, donc de rang < 3.
On intervertit d'abord la première ligne et la deuxième ligne de $A - aI_3$, et on échelonne la matrice obtenue

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1-a & 1+a & 0 \\ 3 & -1-a & 2-a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1+a & 1+a \\ 0 & -1-a & -1-a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1+a & 1+a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en faisant d'abord les opérations $l_2 \leftarrow l_2 + (1+a)l_1$ et $l_3 \leftarrow l_3 - 3l_1$ puis $l_3 \leftarrow l_3 + l_2$.
On déduit que

$$\boxed{\text{rg}(A - aI_3) = \begin{cases} 1 & \text{si } a = -1 \\ 2 & \text{si } a \neq -1 \end{cases}}$$

Exercice 3 .

1. Soit A et B deux matrices semblables et P une matrice inversible telle que $A = PBP^{-1}$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \det(PBP^{-1} - \lambda I_n) &= \det(PBP^{-1} - \lambda P I_n P^{-1}) \\ &= \det(P(B - \lambda I_n)P^{-1}) \\ &= \det(P)\det(B - \lambda I_n)\det(P^{-1}) \\ &= \det(P)\det(B - \lambda I_n)\det(P)^{-1} \\ &= \det(B - \lambda I_n) \\ &= P_B(\lambda) \end{aligned}$$

ainsi les deux matrices A et B ont même polynôme caractéristique.

2. Posons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   On a clairement $P_A(X) = P_B(X) = X^2$; cependant, A et B ne sont pas semblables (car toute matrice semblable à B serait nulle).

Exercice 4 .

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. En utilisant la linéarité de la trace ($\mathrm{tr}(\lambda M + N) = \lambda \mathrm{tr}(M) + \mathrm{tr}(N)$), on a :
$$\begin{aligned} f(\lambda M + N) &= \mathrm{tr}(A)(\lambda M + N) - \mathrm{tr}(\lambda M + N)A \\ &= \lambda \mathrm{tr}(A)M + \mathrm{tr}(A)N - \lambda \mathrm{tr}(M)A - \mathrm{tr}(N)A \\ &= \lambda(\mathrm{tr}(A)M - \mathrm{tr}(M)A) + \mathrm{tr}(A)N - \mathrm{tr}(N)A \\ &= \lambda f(M) + f(N) \end{aligned}$$
   ainsi f est linéaire, c'est donc un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. On a $f(A) = \mathrm{tr}(A)A - \mathrm{tr}(A)A = 0$. Comme $A \neq 0$ (car $\mathrm{tr}(A) \neq 0$), on déduit que la matrice A est un vecteur propre de f associé à la valeur propre $\alpha = 0$.
3. Notons E le sous-espace propre de f associé à la valeur propre $\alpha = 0$ ($E = \mathrm{Ker}(f)$). Comme $A \in E$, on déduit que $\mathrm{vect}(A) \subset E$.
   Récipropquement, si $M \in E$, alors $f(M) = 0$ alors $\mathrm{tr}(A)M - \mathrm{tr}(M)A = 0$, ainsi $M = \dfrac{\mathrm{tr}(M)}{\mathrm{tr}(A)} A \in \mathrm{vect}(A)$.
   On déduit que $E \subset \mathrm{vect}(A)$, d'où l'égalité $E = \mathrm{vect}(A)$ donc E est de dimension 1.
4. Montrons que $F = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{tr}(A)\mathrm{id})$:
   Si $M \in F$ alors $\mathrm{tr}(M) = 0$, d'où $f(M) = \mathrm{tr}(A)M$ alors $(f - \mathrm{tr}(A)\mathrm{id})(M) = 0$. Ainsi $F \subset \mathrm{Ker}(f - \mathrm{tr}(A)\mathrm{id})$.
   Réciproquement, si $M \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{tr}(A)\mathrm{id})$, alors $f(M) = \mathrm{tr}(A)M$, d'où $\mathrm{tr}(M)A = 0$, or $A \neq 0$, donc $\mathrm{tr}(M) = 0$, ainsi $M \in F$.
   Ou par équivalence :
$$M \in F \Leftrightarrow \mathrm{tr}(M) = 0 \Leftrightarrow f(M) = \mathrm{tr}(A)M \Leftrightarrow M \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{tr}(A)\mathrm{id}).$$
5. Si $M \in F$, alors $\mathrm{tr}(M) = 0$, alors $f(M) = \mathrm{tr}(A)M$, ainsi $\mathrm{tr}(A)M \in \mathrm{Im}(f)$
   d'où $M = (\mathrm{tr}(A))^{-1} \cdot (\mathrm{tr}(A)M) \in \mathrm{Im}(f)$ car $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel. Ainsi $F \subset \mathrm{Im}(f)$.
   Réciproquement, si $M \in \mathrm{Im}(f)$, alors il existe $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $M = f(N) = \mathrm{tr}(A)N - \mathrm{tr}(N)A$, d'où $\mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(\mathrm{tr}(A)N - \mathrm{tr}(N)A) = \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(N) - \mathrm{tr}(N)\mathrm{tr}(A) = 0$, donc $M \in F$. Ainsi $\mathrm{Im}(f) \subset F$.
   On déduit que
$$\dim(F) = \dim(\mathrm{Im}\ f) = n^2 - \dim(\mathrm{Ker}\ f) = n^2 - 1.$$
   Remarque : On aurait pu raisonner autrement :
   Une matrice de trace nulle dépend de $n^2 - 1$ coefficients indépendants (trace nulle $\Rightarrow$ une seule relation entre les coefficients de la matrice), ainsi la dimension de F est $n^2 - 1$.
   D'autre part, par le théorème du rang, la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ est $n^2 - 1$.
   On peut donc montrer une des deux inclusions précédentes puis déduire l'égalité par un argument de dimension.