# TD3 - Séries de fonctions

## Partie I - Convergences et Théorèmes d'interversion

### Exercice 1

On considère la séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = xe^{-nx^2}$.

1. Étudier les convergences simple et absolue de la série.
2. Montrer que la série ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.
3. Soit $a > 0$, montrer que la série converge normalement sur $[a, +\infty[$.
4. Étudier la convergence uniforme de la série sur $\mathbb{R}_+$. *(on pourra s'intéresser à $R_n\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$)*

### Exercice 2

Étudier les convergences simple, absolue, uniforme et normale des séries de fonctions suivantes, définie sur l'ensemble $E$.

1. $\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n(x) = \frac{1}{n^2}\left[x^n + (1-x)^n\right]$ sur $E = [0, 1]$.
2. $\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2}$ sur $E = \mathbb{R}$.
3. $\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{n + x}$ sur $E = \mathbb{R}_+$.
4. $\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n + x^2}$ sur $E = \mathbb{R}$.
5. $\sum_{n\geq 0} f_n$ avec $f_n(x) = nx^2e^{-x\sqrt{n}}$ sur $E = \mathbb{R}_+$.

### Exercice 3

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + n^2x^2}.$$

1. Déterminer le domaine de convergence de la série et montrer qu'elle converge uniformément sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.
2. Calculer $\lim_{x\to+\infty} S(x)$ et $\lim_{x\to 0^+} S(x)$
3. *Question supplémentaire :* Calculer $\lim_{x\to 0^+} xS(x)$.

### Exercice 4

1. Déterminer le domaine de définition $D$ de la fonction définie par

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n^2 + 1}.$$

2. Montrer que $f$ est dérivable sur $D \setminus \{0\}$.

## Exercice 5

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ définie sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \dfrac{x^n \ln(x)}{n} & \text{si} \quad x \in ]0,1]. \end{cases}$$

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $[0,1]$.
2. En déduire que
$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}.$$
3. Calculer la somme de cette série numérique $\left(\text{on admettra que } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\right)$.
4. Montrer que pour tout $x \in ]0,1[$,
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \ln(x)}{n} = -\ln(x)\ln(1-x).$$
et que la fonction $g : x \mapsto \ln(x)\ln(1-x)$ est prolongeable par continuité sur $[0,1]$.
5. En déduire que
$$\int_0^1 \ln(x)\ln(1-x)\,\mathrm{d}x = 2 - \frac{\pi^2}{6}.$$

---

# Exercices Supplémentaires

---

## Exercice 6

1. $\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$ sur $E = \mathbb{R}$.
2. $\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n^x}$ sur $E = \mathbb{R}$.
3. $\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n(x) = \dfrac{\ln(1+nx)}{nx^n}$ sur $E = \mathbb{R}_+^*$.

## Exercice 7

Montrer que la fonction $f$ définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx^2}}{(n+1)^3}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$.

## Exercice 8

Montrer que la fonction $f$ définie par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$$

est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.

## Partie II - Séries Entières

### Exercice 9

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ 2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^n}{n!} z^n$ 3. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n z^n$

4. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{3^n+n} z^{4n}$ 5. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \mathrm{ch}(na) z^n$, $a \in \mathbb{R}$

### Exercice 10

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^x + e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que $f$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f^{(n)}(0)$ puis déterminer la série entière $\sum a_n x^n$ engendrée par $f$.
3. La fonction $f$ est-elle développable en série entière à l'origine?

### Exercice 11

Calculer le développement en série entière au voisinage de 0 des fonctions suivantes (en précisant le domaine de validité du développement).

1. $f : x \mapsto \ln(1 + x - 2x^2)$ 2. $f : x \mapsto \arcsin(x)$ 3. $f : x \mapsto \dfrac{x^4}{x^4 + x^2 - 2}$

### Exercice 12

Déterminer les fonctions solutions de l'équation différentielle suivante qui sont développables en série entière en 0 :

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0$$

## Exercices Supplémentaires

### Exercice 13

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}$ 2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^n} z^n$ 3. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \sin(n\theta) z^n$, $\theta \in \mathbb{R}$ 4. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(n-1)^n}{(n+1)!} z^n$

### Exercice 14

Calculer le développement en série entière au voisinage de 0 des fonctions suivantes (en précisant le domaine de validité du développement).

1. $f : x \mapsto \ln(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$ 2. $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{ch}(x)}{e^x}$

### Exercice 15

On considère la fonction $f$ définie sur $]-1, +\infty[$ par

$$f(x) = (1-x)^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer une équation différentielle donc $f$ est solution.
2. Déterminer toutes les solutions développables en série entière en 0 de cette équation différentielle.
3. La fonction $f$ est-elle développable en série entière en 0 ? Si oui, quel est son développement ?