# TD2 - Suites de fonctions

## Partie I - Convergences

### Exercice 1

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)$ où pour tout $n$ : $f_n : E \to \mathbb{R}$.

1. $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}$, $E = [0,1]$.
2. $f_n(x) = \dfrac{x^n - 1}{x^n + 1}$, $E = \mathbb{R}_+$.
3. $f_n(x) = \dfrac{ne^{-x} + x^2}{n+x}$, $E = [0,1]$, $n \neq 0$.
4. $f_n(x) = e^{-nx}\sin(nx)$, $E = \mathbb{R}_+$.
5. $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$, $E = \mathbb{R}_+$, puis $E = [a, +\infty[$ avec $a > 0$.

### Exercice 2

Soit $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et $(f_n)$ la suite de fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x^\alpha}{x^2+n}$.

1. Pour quelles valeurs de $\alpha$ cette suite converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$ ?
2. Pour quelles valeurs de $\alpha$ cette suite converge-t-elle uniformément sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$ ?

### Exercice 3

Soit $(f_n)$ une suite de fonctions réelles définies sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$, et convergeant simplement sur $I$ vers une fonction $f$. Que peut-on dire de $f$ si chaque fonction $f_n$ est :

1. monotone sur $I$ ?
2. paire (ou impaire) sur $I = [-a, a]$, $a \in \mathbb{R}$.
3. convexe (ou concave) sur $I$ ?

*On rappelle qu'une fonction est dite convexe sur un intervalle $I$ si elle est vérifie $\forall x, y \in I$, $\forall t \in [0,1]$, $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$.*

### Exercice 4

On considère la suite des fonctions $(f_n)$ définies sur $[-1,1]$ par:

$$f_n(x) = \sin(nx)e^{-nx^2} + \sqrt{1-x^2}.$$

1. Montrer que la suite $(f_n)$ converge simplement sur $[-1,1]$ vers une fonction $f$ que l'on déterminera.
2. Montrer que $(f_n)$ converge uniformément vers $f$ sur tout segment $[\alpha, 1]$ avec $\alpha \in ]0,1[$.
3. Montrer que $(f_n)$ ne converge pas uniformément vers $f$ sur $[0,1]$.

## Exercice 5

On considère la suite de fonctions $(f_n)$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{nx}\right) + 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que $(f_n)$ converge simplement vers la fonction $f : x \mapsto 1$ sur tout compact de $\mathbb{R}$
2. A-t-on convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ ?

## Exercice 6

On considère pour $n \in \mathbb{N}^*$ la suite de fonctions $(f_n)$ définie sur $[0, \pi]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x(1+nx)} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Étudier les convergences simple et uniforme de $(f_n)$ sur $[0, \pi]$.
2. Soit $a \in ]0, \pi[$. Étudier la convergence uniforme de $(f_n)$ sur le segment $[a, \pi]$.

---

Exercices Supplémentaires

---

## Exercice 7

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)$ où pour tout $n$ : $f_n : E \to \mathbb{R}$.

1. $f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0, n], \\ 0 & \text{si } x > n. \end{cases}$, $E = \mathbb{R}_+$.
2. $f_n(x) = x^n \ln(x)$ prolongée avec $f_n(0) = 0$, $E = [0, 1]$.
3. $f_n(x) = e^{-nx^2} \sin(nx^2)$, $E = [0, 1]$ puis $E = [a, 1]$ avec $a \in ]0, 1[$.
4. $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$, $E = \mathbb{R}_+$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

## Exercice 8

Soit $a \in [0, 1[$. Considérons la suite des fonctions

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{C} & \to \mathbb{C} \\ z \mapsto & 1 + z + \cdots + z^n \end{cases}$$

1. Montrer que $(f_n)$ converge uniformément vers $f : z \mapsto (1-z)^{-1}$ dans chaque disque $D_a = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq a\}$.
2. Montrer que $(f_n)$ converge simplement, mais non uniformément, dans le disque unité ouvert $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$.

## Exercice 9

On considère la suite $(f_n)$ définie sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x(1-x) & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}], \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(f_n)$ converge simplement vers une fonction $f$ que l'on déterminera.
2. Calculer
$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$
3. La suite $(f_n)$ converge-t-elle uniformément vers $f$ sur $[0,1]$ ?
4. Soit $a \in ]0,1[$. Étudier la convergence uniforme de $(f_n)$ vers $f$ sur $[a,1]$.

## Exercice 10

Calculer

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{ne^x}{n+x}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^5}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x.$

## Exercice 11

On considère la suite $(f_n)$ définie sur $[-1,1]$ par

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}.$$

1. Montrer que la suite $(f_n)$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers la fonction nulle.
2. Étudier la convergence de la suite $(f_n')$ sur $[-1,1]$.
3. Soit $(g_n)$ la suite de fonctions définie sur $[-1,1]$ par
$$g_n(x) = \frac{\ln(1+n^2x^2)}{2n^2}.$$
Montrer que la suite $(g_n)$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[-1,1]$.

## Exercice 12

On considère la suite $(f_n)$ définie sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \frac{ne^{-x}+x^2}{n+x}$$

1. Montrer que la suite $(f_n)$ converge uniformément vers une limite $f$ à déterminer.
2. En déduire la nature de la suite
$$u_n = \int_0^1 \frac{ne^{-x}+x^2}{n+x}\,\mathrm{d}x.$$

## Exercice 13

On considère la suite $(f_n)$ définie sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \frac{n(x^3+x)e^{-x}}{nx+1}$$

1. Montrer que la suite $(f_n)$ converge simplement vers une limite $f$ à déterminer.
2. Montrer que la suite $(f_n)$ converge uniformément sur tout intervalle $[a,1]$ avec $a \in ]0,1[$. A-t-on convergence uniforme sur $[0,1]$ ?
3. Montrer que $|f_n(x) - f(x)|$ est bornée sur $[0,1]$.
4. Déduire des questions précédentes la nature de la suite

$$u_n = \int_0^1 \frac{n(x^3+x)e^{-x}}{nx+1}\,\mathrm{d}x.$$

## Exercice 14

On considère la suite $(f_n)$ et la fonction $\psi$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x + \frac{1}{n}, \quad \psi(x) = x^2.$$

Montrer que $(f_n)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une limite $f$, mais que $\psi \circ f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $\psi \circ f$.

Généralisation :
Soit $(f_n)$ une suite de fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction $f$.

1. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que $(f_n \circ \phi)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $f \circ \phi$.
2. Soit $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que $(\psi \circ f_n)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $\psi \circ f$.
3. À l'aide de l'exemple ci-dessus, que pouvez-vous dire si $\psi$ n'est pas uniformément continue ?