TD1 - Séries Numériques

Partie I - Séries numériques à termes positifs

Exercice 1

Soit (u_n) une suite de réels positifs et $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ sont de même nature.

Exercice 2

Étudier les séries:

1. $\sum_{n\geq 1} \cos \dfrac{1}{n^2}$
2. $\sum_{n\geq 0} \dfrac{(-1)^n n}{n+1}$
3. $\sum_{n\geq 1} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$
4. $\sum_{n\geq 1} \left(\cos \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$

Exercice 3

Etudier la convergence des séries suivantes:

1. $\sum_{n\geq 1} \dfrac{n^2+1}{n^2}$
2. $\sum_{n\geq 1} \dfrac{2}{\sqrt{n}}$
3. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3}$
4. $\sum_{n\geq 1} \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$
5. $\sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{(\ln(n))^n}$
6. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ln\left(1+e^{-n}\right)$

Exercice 4

Etudier la nature et, le cas échéant, calculer la somme des séries de terme général :

1. $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$
2. $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$
3. $u_n = \dfrac{2n-1}{n\left(n^2-4\right)}$
4. $u_n = \ln\left(1-\dfrac{1}{(n+2)^2}\right)$

Exercice 5 [Séries de Bertrand]

1. Montrer que
$$\forall n \geq 2, \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} \geq \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2)$$
2. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{n\ln n}$.
3. Montrer que
$$\forall n \geq 3, \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln^2 k} \leq \frac{1}{\ln 2}$$
4. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{n\ln^2 n}$.

Exercice 6

Etudier la nature de la série de terme général

1. $u_n = \dfrac{n+1}{n^3-7}$
2. $u_n = \dfrac{n+1}{n^2-7}$
3. $u_n = \dfrac{n+1}{n-7}$
4. $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
5. $u_n = \dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}}$
6. $u_n = \dfrac{1}{\ln(n^2+2)}$
7. $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n^{\frac{3}{2}}}$
8. $u_n = \dfrac{n^n}{2^n}$
9. $u_n = \dfrac{2^n+3^n}{n^2+\ln(n)+5^n}$
10. $u_n = \dfrac{1}{n!}$
11. $u_n = \dfrac{n^{10000}}{n!}$
12. $u_n = \dfrac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n-1)!}$
13. $u_n = \left(\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^n$
14. $u_n = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$
15. $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$

Exercice 7

Étudier la nature de la série de terme général :

$$u_n = \left(\sqrt{n^2+an+2} - \sqrt{n^2+bn+1}\right)^n, \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2, a \geq b.$$

Partie 2 - Séries numériques à termes quelconques

Exercice 8

Étudier les séries:

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1\right)$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$

Exercice 9

Considérons les séries

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 1}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$$

Montrer que les termes généraux de ces séries sont équivalents mais que les séries n'ont pas la même nature.

Exercice 10

Étudier la convergence de la série numérique de terme général

1. $u_n=(-1)^n\dfrac{n^3}{n!}$
2. $u_n=\dfrac{a^n}{n!},\quad a\in\mathbb{C}$
3. $u_n=na^{n-1},\quad a\in\mathbb{C}$
4. $u_n=\sin\left(\dfrac{n^2+1}{n}\pi\right)$
5. $u_n=(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$
6. $u_n=n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Exercice 11

On considère la série :

$$\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n+1}$$

1. Montrer que la série est convergente.
2. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$:
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t}-(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$
3. Montrer que :
$$\forall n\in\mathbb{N}, 0\leq\int_0^1\frac{t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t\leq\frac{1}{n+2}$$
4. En déduire que :
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=\ln 2$$
5. Donner une valeur approchée de $\ln 2$ à la précision 10^{-3}.

Exercice 12

Montrer la convergence et calculer les sommes des séries de terme général

1. $u_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k)!k!}$
2. $u_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{k!2^{n-k}}$