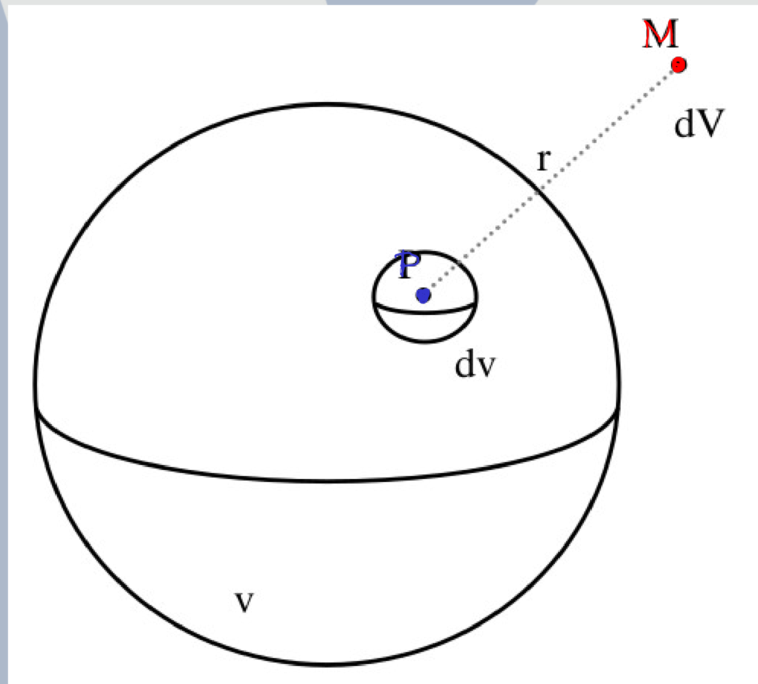
Électromagnétisme

Chapitre 5 – Potentiel électrostatique



Physique - 2023-2024

Présentation rédigée par Émilie Dupont (Cergy) : emilie.dupont@cyu.fr, CY308

Programme d'électrostatique

- Chapitre 1 – Force entre deux charges
- Chapitre 2 – Champ électrostatique
- Chapitre 3 – Théorème de superposition et symétries
- Chapitre 4 – Théorème de Gauss
- **Chapitre 5 – Potentiel électrostatique**
- Chapitre 6 – Conducteurs en équilibre électrostatique

1.5 Potentiel électrostatique

1.5.0 Notions mathématiques : le gradient

Variation dV d'un champ V(M)

(3D)

$$dV(M) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial V}{\partial x_i} dx_i = \overrightarrow{\text{grad}}\, V \cdot \overrightarrow{dOM}$$

produit scalaire

vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\, V$ est le gradient du champ scalaire V.

$$dV(M) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) dz$$

$$= \overrightarrow{\text{grad}}\, V \cdot \overrightarrow{dOM}$$

Expressions du gradient :

$$\overrightarrow{dOM} = \begin{vmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, V = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial x} \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} \end{Bmatrix}$$

coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{dOM} = \begin{vmatrix} dr \\ r d\theta \\ dz \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, V = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} \end{Bmatrix}$$

coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{dOM} = \begin{vmatrix} dr \\ r d\theta \\ r \sin\theta \, d\varphi \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, V = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} \\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial V}{\partial \varphi} \end{Bmatrix}$$

coordonnées sphériques

1.5 Potentiel électrostatique

1.5.0 Notions mathématiques : le gradient

Dans le cas de l'électrostatique (sans déplacement de charges), le champ électrostatique $\vec{E}$ est lié au potentiel électrostatique par la relation :

$$\boxed{\vec{E} = -\,\overrightarrow{\text{grad}\,V}}$$

surface "équipotentielle" S de V(M), c'est à dire, une surface telle qu'en tout point M qui lui appartient, V(M) prend la même valeur V_0.

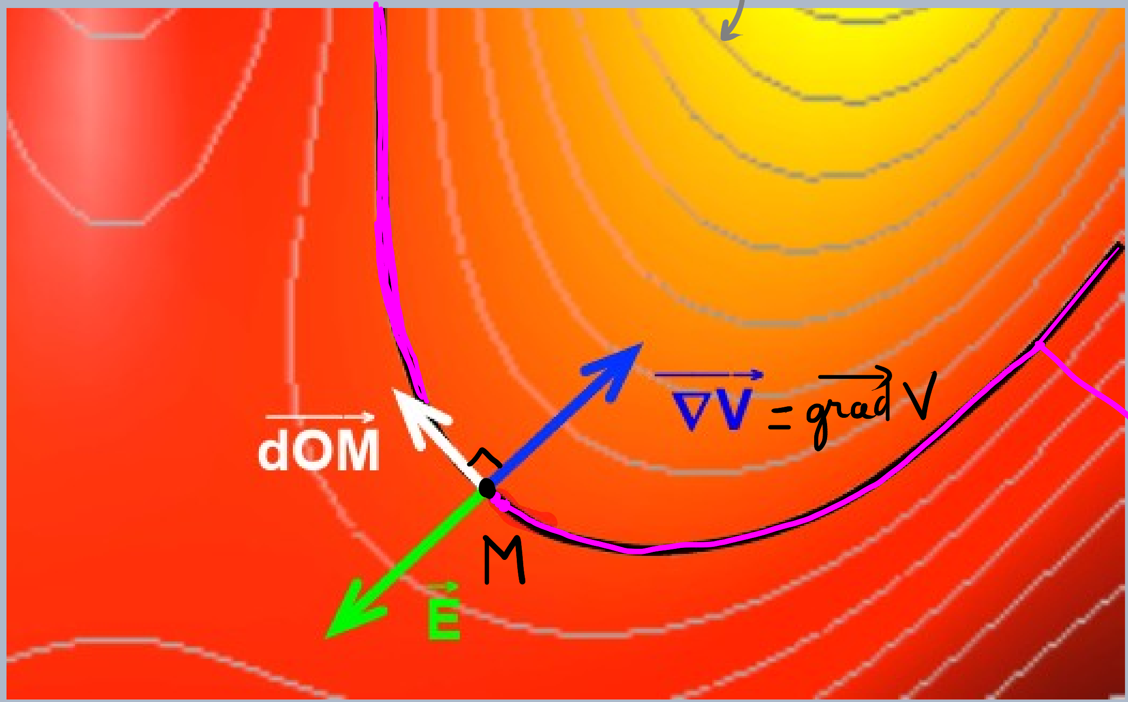
1.5 Potentiel électrostatique

1.5.0 Notions mathématiques : le gradient

Le vecteur gradient $\overrightarrow{\text{grad}}\,V$ est donc **normal** à la surface équipotentielle passant par M de la fonction scalaire V(M).

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$$

équipotentielle



équipotentielle

équipotentielle : $V(M) = V_0$

le long de ces lignes équipotentielles $dV = 0$

sur une équipotentielle

$$dV(M) = V_0 - V_0 = \overrightarrow{\text{grad}}\,V \cdot d\overrightarrow{OM} = 0$$

$$dV = 0 \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}\,V \perp d\overrightarrow{OM}$$

1.5 Potentiel électrostatique

1.5.0 Notions mathématiques : le gradient

Complément sur les lignes de champ et les surfaces équipotentielles

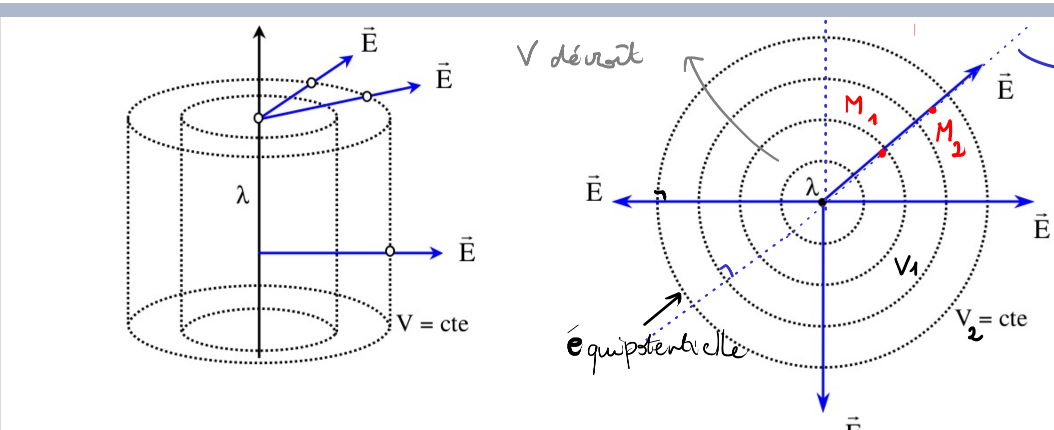
1) Les lignes de champ sont telles qu'en chacun de leurs points M, le vecteur $\vec{E}$ leur est tangent. $\vec{E} \wedge \vec{d\ell} = \vec{0}$

2) Une surface équipotentielle est définie par l'ensemble des points où la valeur du potentiel électrostatique est invariante. $V = V_0$ constant

3) Les lignes de champ sont en tout point ⊥ aux équipotentielles (car $\vec{E}.\vec{dl} = -dV = 0$) $\vec{E} \cdot \vec{d\ell} = -\overrightarrow{grad}\,V \cdot \vec{d\ell} = -dV = 0$

4) Si le déplacement a lieu le long d'une ligne de champ et dans le sens du champ depuis un point M_1 vers un point M_2 alors : $\int_{M_1}^{M_2} \vec{E}.\vec{dl} > 0$

Le long d'une ligne de champ, le champ $\vec{E}$ est dirigé vers les potentiels décroissants $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$



ligne de champ

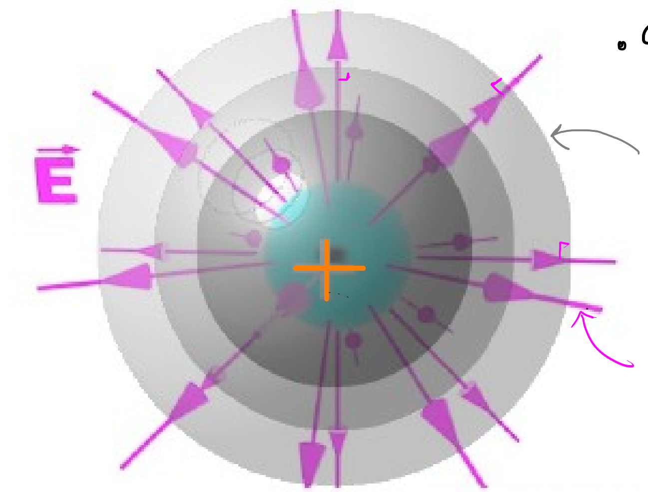
$V_2 < V_1$

exemple pour un fil infini chargé avec une densité linéique λ.

1.5 Potentiel électrostatique

1.5.0 Notions mathématiques : le gradient

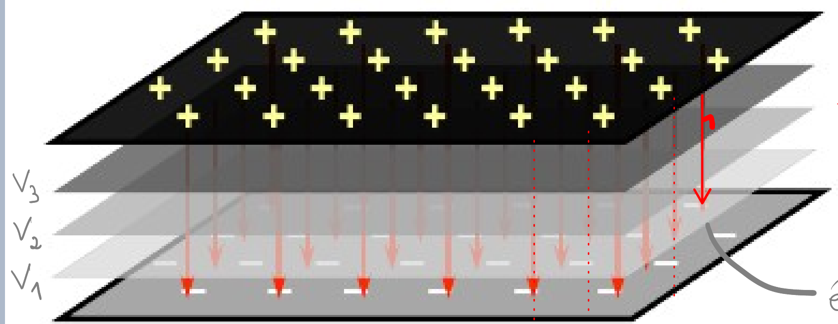
• charge ponctuelle + : $\vec{E}$ selon $\vec{u}_r$



Équipotentielles :
sphères concentriques

ligne de champ $\vec{E}$

Champ électrostatique et potentiels créés par un condensateur plan : (2 plans chargés) $\vec{E} = E\,\vec{u}_z$



$\vec{E}$

ligne de champ = droites ⊥ plan

équipotentielles

Les équipotentielles sont des plans parallèles

1.5 Potentiel électrostatique

1.5.1 Énergie potentielle électrique

Travail de la force électrostatique de Coulomb $dW = \vec{F} \cdot d\vec{OM}$ (cf méca. du point)

une charge q en M : $\vec{F} = q\vec{E}(M)$ force de Coulomb

$$dW = \vec{F}.d\vec{l} = q\vec{E}.d\vec{l} = -q\,\overrightarrow{\text{grad}}V.d\vec{l}$$
$$= -\overrightarrow{\text{grad}}(qV).d\vec{l}$$
$$= -d(qV) \text{ par déf.}$$

car $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$

$$W_{AB} = \int_A^B dW = \int_A^B -d(qV) = -(qV(B) - qV(A))$$

donc $W_{AB} = q[V(A) - V(B)]$

$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,E_p$

$dW = -dE_p$ (conservation de l'E_m) $\longrightarrow dE_p = d(qV)$

L'énergie potentielle d'interaction entre une charge q et un champ électrostatique $\vec{E}$ créant le potentiel V, est :

à une constante près

$$\boxed{E_p = \varepsilon_p = q.V + K}$$

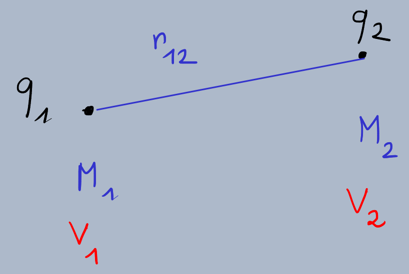
La force de Coulomb dérive d'une énergie potentielle :

$$\boxed{\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\varepsilon_p}$$

1.5 Potentiel électrostatique

1.5.1 Énergie potentielle électrique

Soient deux charges ponctuelles q_1 et q_2 en M_1 et M_2 et $M_1M_2 = r_{12}$



la même

V_2

Energie potentielle de q_1 $\quad \varepsilon_{p1} = q_1V_2 + K = \dfrac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} + K$

V_1

Energie potentielle de q_2 $\quad \varepsilon_{p2} = q_2V_1 + K = \dfrac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} + K$

$\Rightarrow \quad \varepsilon_{p1} = \varepsilon_{p2}$

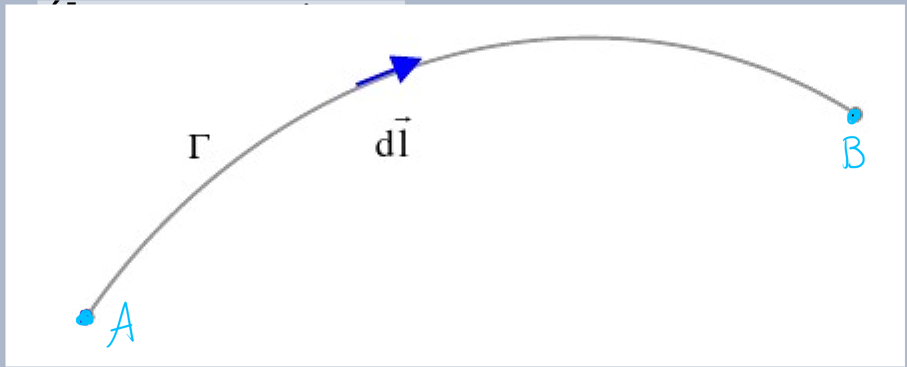
L'énergie potentielle d'interaction est le travail fourni par un opérateur pour amener les charges depuis des positions où elles sont infiniment éloignées et n'interagissent pas (pas de force de Coulomb entre les charges), jusqu'à des positions de voisinage où chaque charge est soumise au champ créé par l'autre charge : on montre que

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_p = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} + K = \varepsilon_{p1} = \varepsilon_{p2}$$

1.5 Potentiel électrostatique

1.5.2 Circulation du champ électrique

1. Définition de la circulation du champ



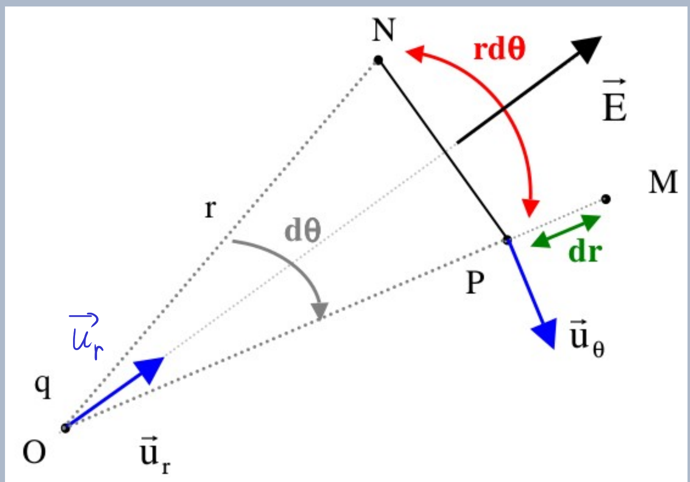
circulation C d'un champ de vecteurs $\vec{E}$

$$\boxed{C = \int_A^B \vec{E}.\vec{dl}}$$

produit scalaire

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V = -\frac{dV}{dr}\vec{u}_r \rightarrow V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

2. Circulation du champ d'une charge ponctuelle



or

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$$

$$\overrightarrow{NM} = dr\,\vec{u}_r + rd\theta\,\vec{u}_\theta$$

$$C = \int_{M_1}^{M_2} dC = \int_{r_1}^{r_2} -d\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2} = V(r_1) - V(r_2)$$

$$C = \int_{M_1}^{M_2} \vec{E}.\vec{dl} = \int_{M_1}^{M_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} -d\left(\frac{1}{r}\right)$$

La circulation du champ ne dépend que des positions des points de départ et d'arrivée, et nom du chemin suivi. On dit que le **champ est à circulation conservative**.

1.5.2 Circulation du champ électrique

3. Définition du potentiel électrostatique

Le champ est à circulation conservative et la fonction potentiel électrostatique est définie par :

$$\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V}$$

avec $\vec{E}$ champ électrostatique [$V.m^{-1}$]

V potentiel [V]

D'après cette relation, on peut écrire la circulation du champ $\vec{E}$:

$$C = \int_A^B \vec{E}.\vec{dl} = \int_A^B -\overrightarrow{\text{grad}}\,V.\vec{dl} = \int_A^B -dV$$

$$\boxed{C = V(A) - V(B)}$$

La circulation C se mesure donc en Volts (V)

1.5 Potentiel électrostatique

1.5.3 Potentiel électrique - Exemples d'une ou plusieurs charges

a) Potentiel créé par un ensemble de charges ponctuelles

potentiel électrostatique V en un point M créé par une charge q placée en O

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + V_0$$

V(M)	potentiel en M [V]
V_0	constante d'intégration [V], (généralement choisie comme étant nulle)
r	OM [m]

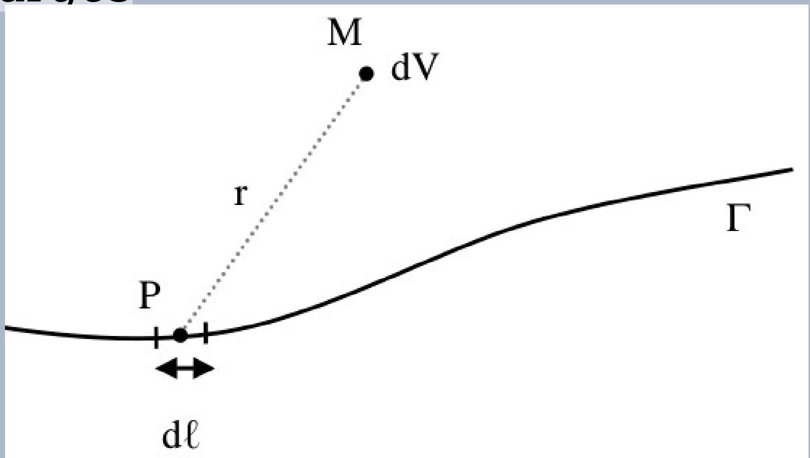
$$V(M) = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i} + V_0$$

Le potentiel électrique est défini et continu en tout point sauf aux points où se trouvent les charges ponctuelles.

1.5 Potentiel électrostatique

1.5.4 Potentiel électrique d'une distribution continue de charges

b) Potentiel créé par une distribution linéique de charges



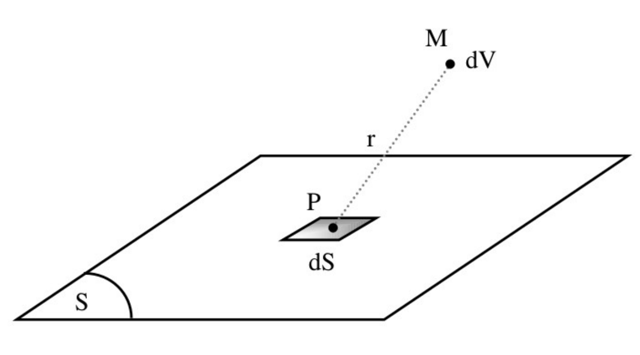
$$V(M) = \int_{P \in \Gamma} \frac{\lambda \, d\ell}{4\pi\varepsilon_0 r} + V_0$$

Dans le cas d'une distribution linéique de charges, le potentiel électrique n'est pas défini sur les points où se trouvent les charges.

1.5 Potentiel électrostatique

1.5.4 Potentiel électrique d'une distribution continue de charges

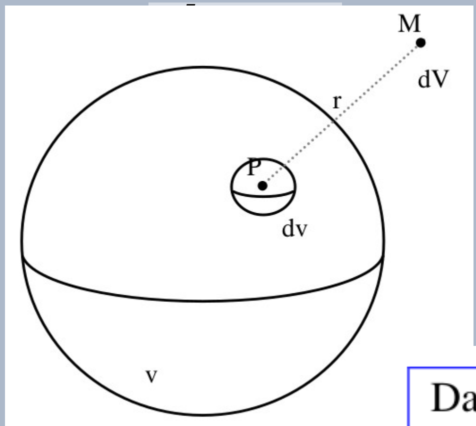
c) Potentiel créé par une distribution surfacique de



$$V(M) = \iint_{P \in S} \frac{\sigma dS}{4\pi\varepsilon_0 r} + V_0$$

Dans le cas d'une distribution surfacique de charges, le potentiel électrique est défini sur la surface chargée et il est continu à la traversée de la surface.

d) Potentiel créé par une distribution volumique de



$$V(M) = \iiint_{P \in v} \frac{\rho dV}{4\pi\varepsilon_0 r} + V_0$$

Attention !!
Ne pas confondre ici
V ⇨ pour le potentiel
v ⇨ pour le volume

Dans le cas d'une distribution volumique de charges, le potentiel électrique est défini et continu en tout point de l'espace.

1.5 Potentiel électrostatique

1.5.5 Détermination de V à partir de E

Soit un cylindre de rayon R et de hauteur infinie chargé uniformément avec une densité volumique de charges ρ. Déterminer le potentiel créé ce système.

1.5 Potentiel électrostatique

1.5.5 Détermination de V à partir de E

Soit un cylindre de rayon R et de hauteur infinie chargé uniformément avec une densité volumique de charges ρ. Déterminer le potentiel créé ce système.

$$\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r \qquad \vec{E}(r \geq R) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\vec{u}_r \qquad \vec{E}(r \leq R) = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}\vec{u}_r$$

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{dV}{dr}, \text{ car r est la seule variable}$$

$$V(r \geq R) = \int -\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}dr + K \quad \text{et} \quad V(r \leq R) = \int -\frac{\rho r}{2\varepsilon_0}dr + K'$$

$$V(r = R^+) = V(r = R^-) = -\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\ln(R) + K = -\frac{\rho R^2}{4\varepsilon_0} + K'$$

$$V(r \geq R) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\ln\left(\frac{R}{r}\right) - \frac{\rho R^2}{4\varepsilon_0} + K' \quad \text{et} \quad V(r \leq R) = -\frac{\rho r^2}{4\varepsilon_0} + K'$$

Bibliographie

- [1]Polycopié de cours
- [2] CUPGE - CY : Introduction à l'électromagnétisme
- [3] Wikipédia
- [4] Encyclopédie Universalis
- [5] David Sénéchal - « Histoire des sciences » PHQ399 Université de Sherbrooke, QC
- [6] pour la suite : Khan Academy , Unisciel etc.
- [7] Cours LP 203 - Champs électrique et magnétique de Nicolas MENGUY