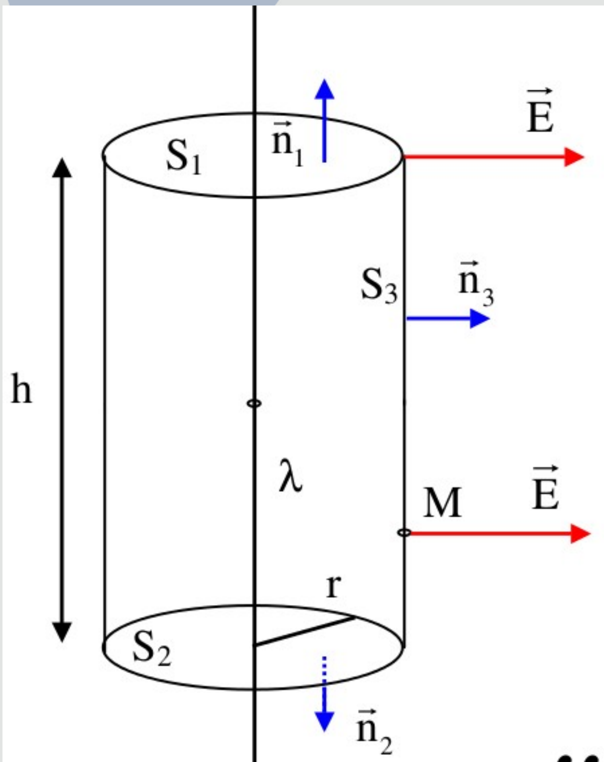
Électromagnétisme

Chapitre 4 – Théorème de Gauss



Physique - 2023-2024

Présentation rédigée par Émilie Dupont (Cergy) : emilie.dupont@cyu.fr, CY308

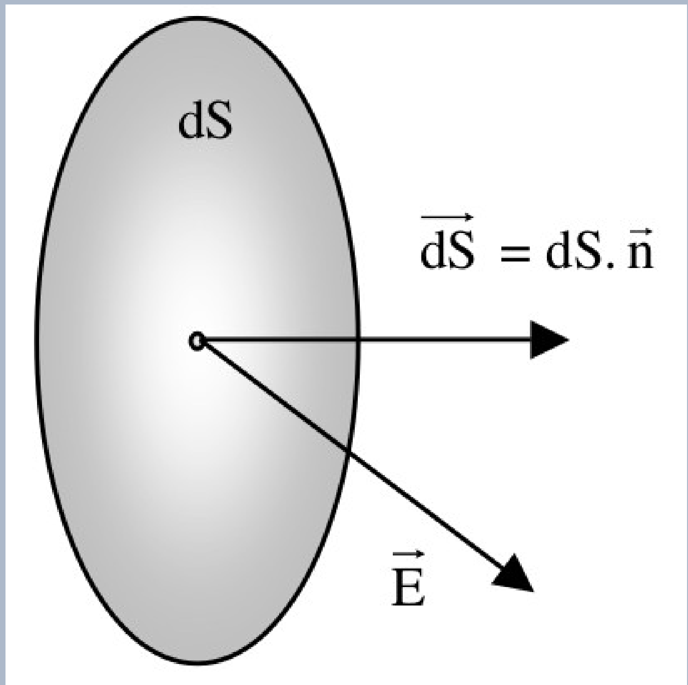
Programme d'électrostatique

- Chapitre 1 – Force entre deux charges
- Chapitre 2 – Champ électrostatique
- Chapitre 3 – Théorème de superposition et symétries
- **Chapitre 4 – Théorème de Gauss**
- Chapitre 5 – Potentiel électrostatique
- Chapitre 6 – Conducteurs en équilibre électrostatique

1.4 Théorème de Gauss

1.4.1 Flux du champ d'une charge à travers une surface

Flux élémentaire :



Le flux élémentaire $d\phi$ du champ $\vec{E}$ à travers dS est défini par :

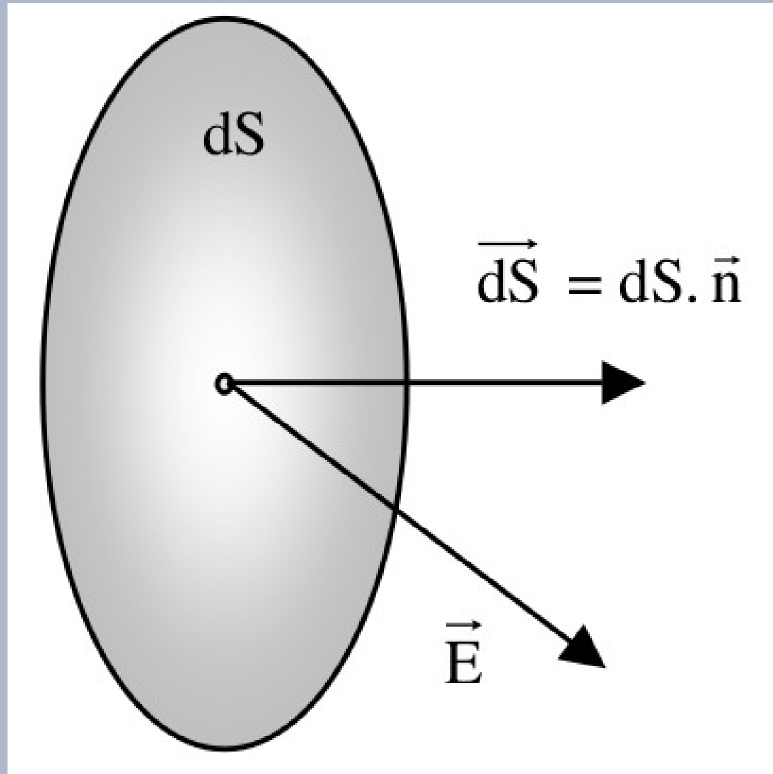
$d\phi = \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \vec{E}.\vec{n}\ dS$ avec dS en m^2, $d\phi$ en V.m et $\vec{E}$ en $V.m^{-1}$

1.4 Théorème de Gauss

1.4.1 Flux du champ d'une charge à travers une surface

Flux total à travers une surface

$$\Phi = \iint_S d\phi = \iint_S \vec{E}\,\vec{dS} = \iint_S \vec{E}.\vec{n}\,dS$$



1.4 Théorème de Gauss

1.4.2 Théorème de Gauss

Théorème : Le flux Φ du champ $\vec{E}$ à travers une surface fermée S est proportionnel à la charge q_{int} contenue dans le volume V délimité par la surface S

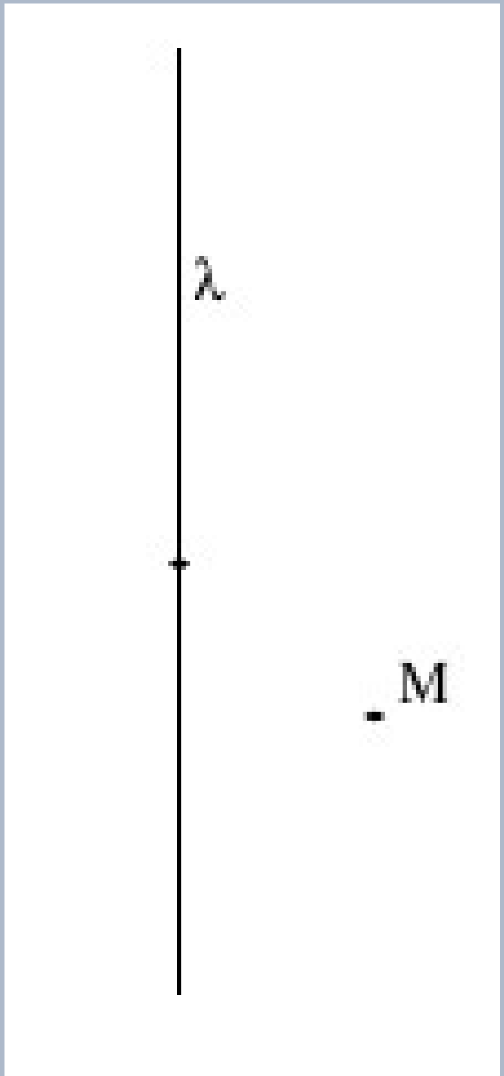
$$\Phi = \iint_S \vec{E}\,\vec{dS} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Φ	flux	[V.m]
q_{int}	charge	[C]
ε_0	permittivité absolue du vide [SI]	

1.4 Théorème de Gauss

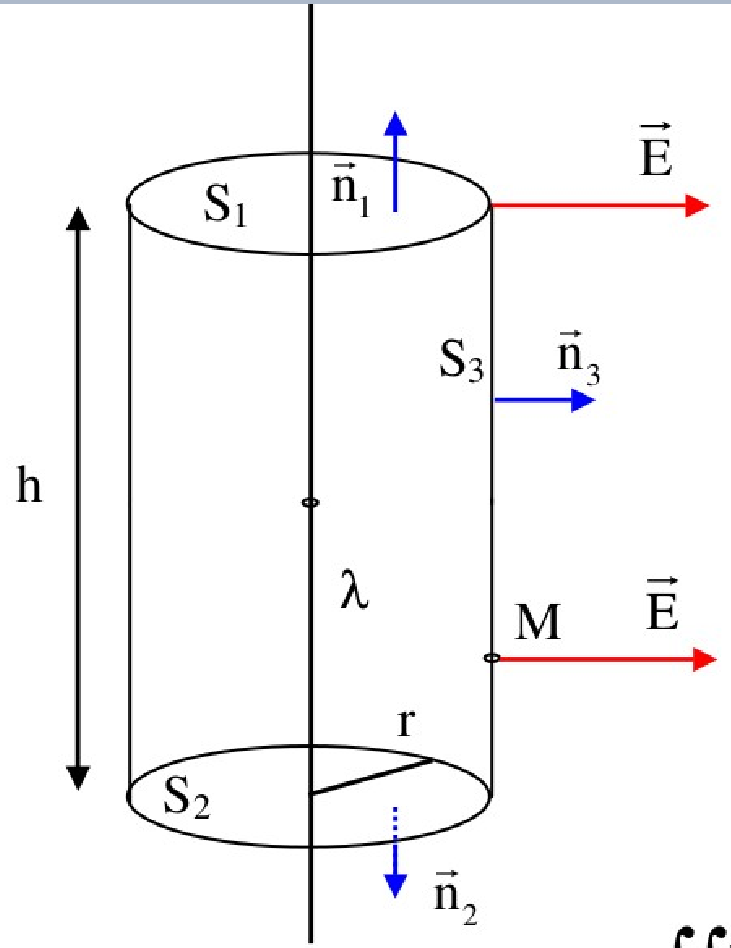
1.4.3 Exemples

Champ électrostatique créé par une distribution linéique uniformément chargée



Il existe des symétries cylindriques et invariance de translation, par conséquent, le champ $\vec{E}$ en M s'exprime en coordonnées cylindriques : $\Rightarrow \vec{E}(r) = E(r).\,\vec{u}_r$

1.4.3 Exemples



On applique le théorème de Gauss sur S_1, S_2 et S_3.

Le flux du champ $\vec{E}$ pour S_1 et S_2 est nul car :

$\vec{E} \perp \vec{n}_1$ et $\vec{E} \perp \vec{n}_2$

$$\Phi_1 = \iint_{S_1} \vec{E}\vec{n}_1 dS = 0$$

$$\Phi_2 = \iint_{S_2} \vec{E}\vec{n}_2 dS = 0$$

Calcul du flux à travers la surface S_3

$$\Phi_3 = \iint_{S_3} \vec{E}\vec{n}_3 dS = \iint_{S_3} E(r).dS = E(r)\iint_{S_3} dS = E(r).2\pi rh$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = \Phi_3 = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \qquad E(r).2\pi rh = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E(r) = \frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0}}$$

1.4 Théorème de Gauss

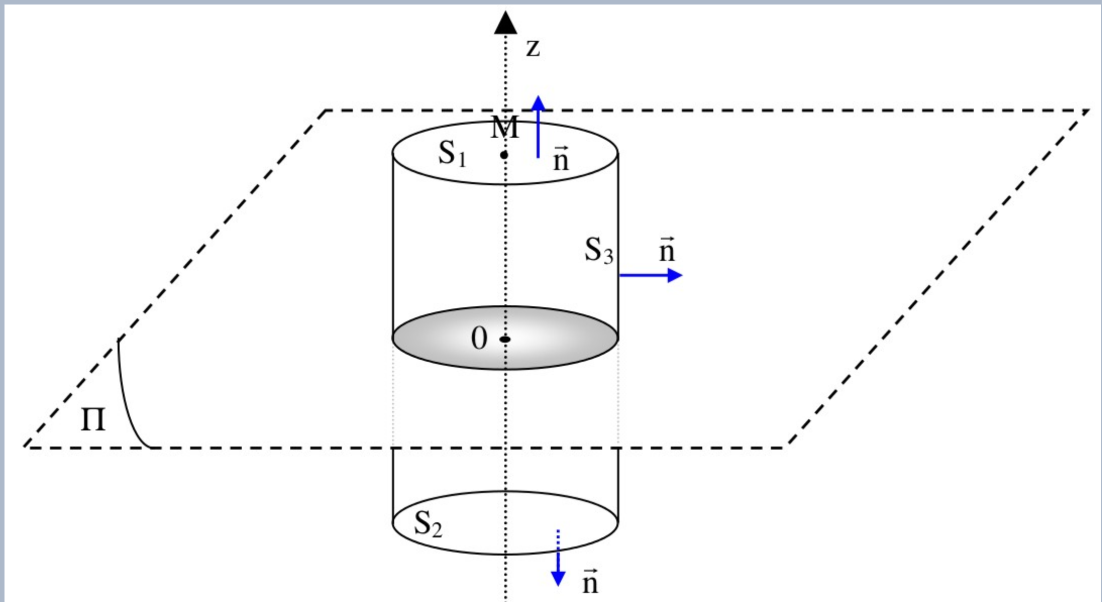
1.4.3 Exemples

1.4 Théorème de Gauss

1.4.3 Exemples

Champ électrostatique créé par un plan infini uniformément chargé

plan infini Π portant une charge électrique σ uniforme par unité de surface.



$\vec{E}$ appartient aux plans de symétrie, il est donc perpendiculaire à Π.

$\Rightarrow \vec{E} = E_z(x,y,z)\,\vec{k}$ au point M

Il existe une invariance par translation selon x et y :

$\Rightarrow \vec{E} = E_z(z)\,\vec{k}$ au point M

$$\Phi = \iint_S \vec{E}\,\vec{dS} = \iint_{S_1} \vec{E}\,\vec{n}\,dS + \iint_{S_2} \vec{E}\,\vec{n}\,dS + \iint_{S_3} \vec{E}\,\vec{n}\,dS$$

$$\Phi = E(z).S + E(-z).S + 0$$

$$= 2ES \quad \text{car} \quad \vec{E}(-z) = -\vec{E}(z) \quad \text{et} \quad \vec{n}_2 = -\vec{n}_1$$

donc

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

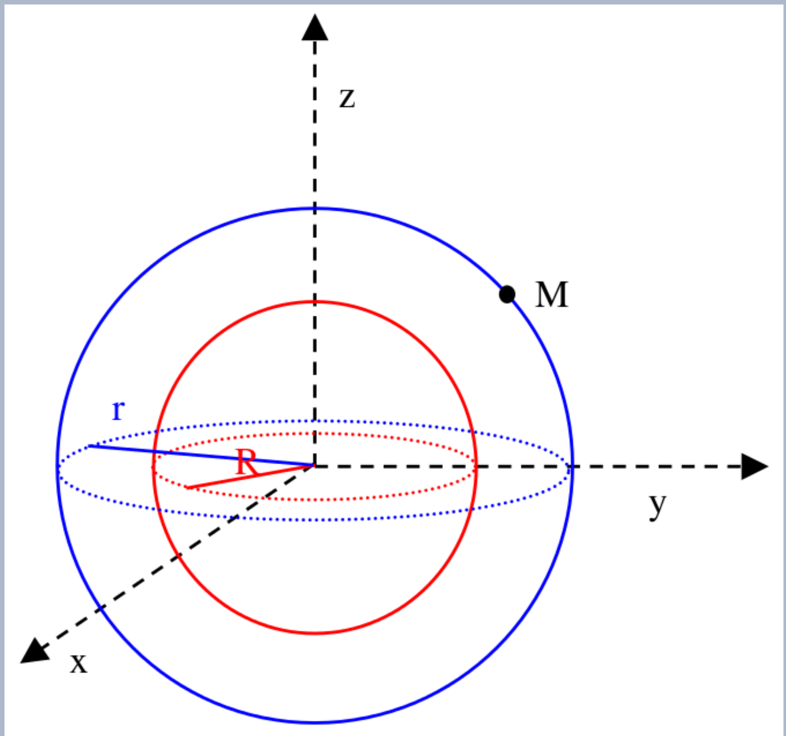
1.4 Théorème de Gauss

1.4.3 Exemples

1.4 Théorème de Gauss

1.4.3 Exemples

Champ électrostatique créé par une boule uniformément chargée



symétrie sphérique,

$$\vec{E}(r) = E(r).\vec{u}_r$$

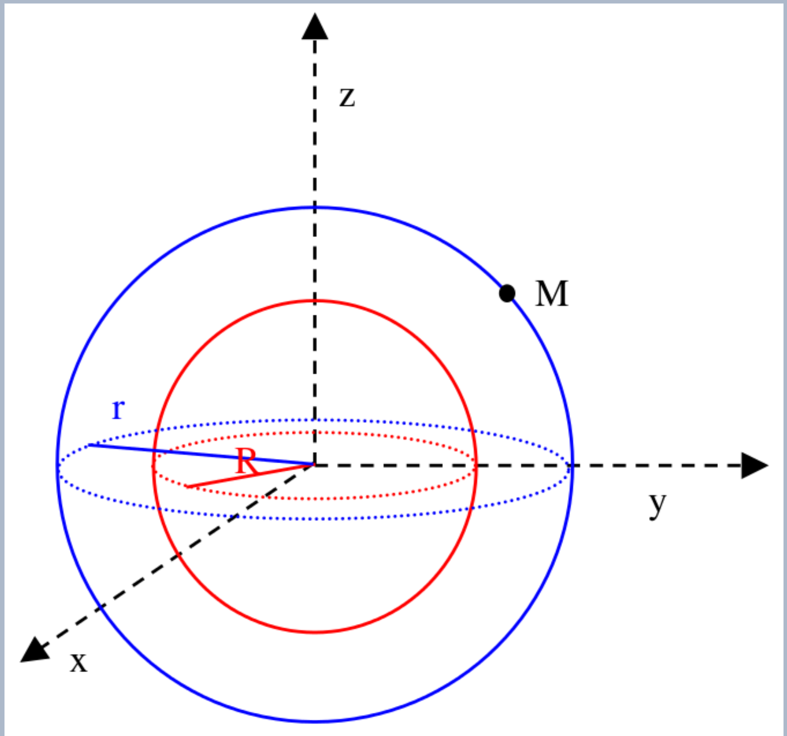
$$\Phi = \oiint_S \vec{E}.\vec{dS} = \oiint_S \vec{E}.\vec{n}.dS = \oiint_S E(r).dS = E(r).\oiint_S dS = E(r).4\pi r^2$$

donc

$$\Phi = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho V}{\varepsilon_0} = E(r).4\pi r^2$$

1.4 Théorème de Gauss

1.4.3 Exemples



Si la sphère de Gauss a un rayon r > R

$$Q = \rho V$$

$$\boxed{E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

Si la sphère de Gauss a un rayon r < R

$$\boxed{E(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}}$$

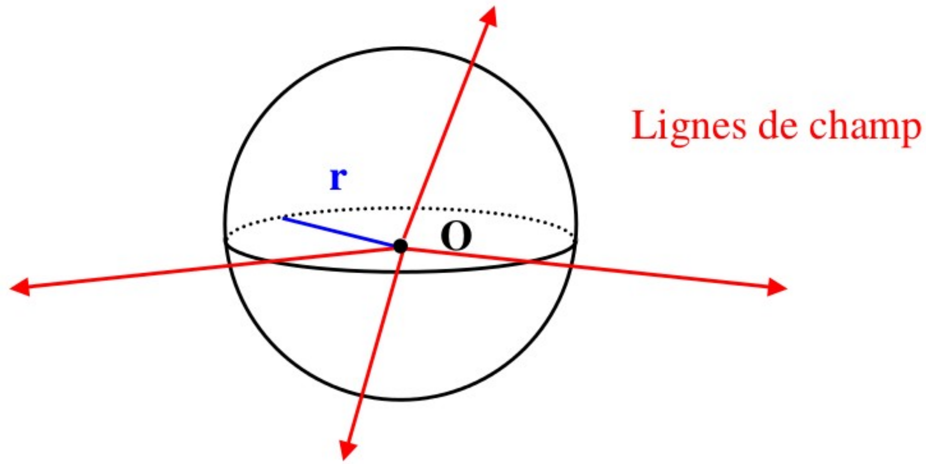
1.4 Théorème de Gauss

1.4.3 Exemples

1.4 Théorème de Gauss

1.4.3 Exemples

Ainsi les lignes de champ produites par une charge ponctuelle placée en O sont des droites passant par O.



Bibliographie

- [1]Polycopié de cours
- [2] CUPGE - CY : Introduction à l'électromagnétisme
- [3] Wikipédia
- [4] Encyclopédie Universalis
- [5] David Sénéchal - « Histoire des sciences » PHQ399 Université de Sherbrooke, QC
- [6] pour la suite : Khan Academy , Unisciel etc…