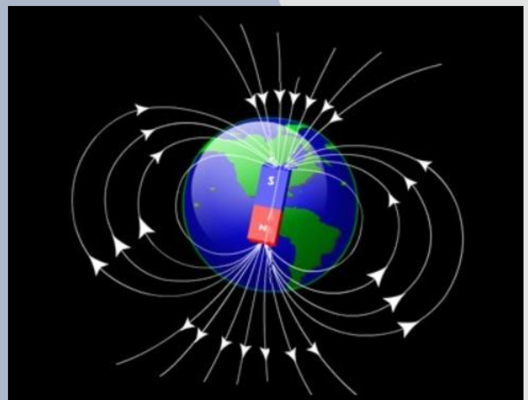
Électromagnétisme

Chapitre 4 – Équations de Maxwell



Physique - 2023-2024

Présentation rédigée par Lucie Desplat (Pau)

Programme de Magnétostatique

- Chapitre 1 – Champ magnétique - Force de Lorentz
- Chapitre 2 – Loi de Biot et Savart - Théorème d’Ampère
- Chapitre 3 – Électrocinétique
- Chapitre 4 – **Équations de Maxwell**
- Chapitre 5 – Induction électromagnétique

2.4 Équations de Maxwell

2.4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on se propose d'étudier l'électromagnétisme : les grandeurs physiques étudiées pourront dépendre de la position spatiale et du temps.

Pour ce faire, on va présenter les 4 équations de Maxwell qui sont des lois fondamentales de la physique. Elles permettent de décrire mathématiquement l'onde électromagnétique constituée de deux parties indissociables : magnétique et électrique. Les voici:

- équation de Maxwell Gauss : $div(\vec{E}) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$
- équation de Maxwell Flux : $div(\vec{B}) = 0$
- équation de Maxwell Faraday : $\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
- équation de Maxwell Ampère : $\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

2.4 Équations de Maxwell

2.4.1 Introduction

équation de Maxwell Gauss : $div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

équation de Maxwell Flux : $div(\vec{B}) = 0$

équation de Maxwell Faraday : $\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

équation de Maxwell Ampère : $\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

- $\mu_0 = 4 \times 10^{-7} I$ est la perméabilité magnétique
- $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} I$ est la permittivité du vide.
- B : champ magnétique en Tesla
- E : champ électrique en V/m

Question :

Que deviennent ces relations, exprimées dans le vide ? *Voir dans le poly de cours*

2.4 Équations de Maxwell

2.4.1 Introduction

Force de Lorentz

Le champ électromagnétique exerce sur une particule chargée de charge q placée en M et animée d'une vitesse v une force appelée force de Lorentz :

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{E} + q(\vec{v} \wedge \vec{B})}$$

2.4 Équations de Maxwell

2.4.1 Introduction

Rappels

- Un champ uniforme est un champ indépendant du vecteur position
- Un champ stationnaire ou permanent est un champ indépendant du temps.
- Un champ constant est un champ indépendant du temps et de la position.

2.4 Équations de Maxwell

2.4.2 Conservation de la charge

Soit ρ la densité volumique de charges dans un milieu. Et $\vec{j} = \rho \vec{v}$. L'équation de conservation de la charge s'écrit :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\vec{j}) = 0}$$

Pour la démonstration, voir poly de cours.

2.4 Équations de Maxwell

2.4.3 Contenu physique des équations de Maxwell

Les équations de Maxwell sont des équations locales. Par intégration, on obtient des lois et théorèmes connus, par exemple : le théorème de Gauss, celui d'Ampère, etc.

Équation de Maxwell Gauss et théorème de Gauss

On intègre l'équation de Maxwell Gauss dans un volume V quelconque, délimité par la surface S, il vient :

$$\iiint_V div(\vec{E}).d\tau = \iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0}.d\tau$$

Le théorème d'Ostrogradsky donne :

$$\iiint_V div(\vec{E}).d\tau = \oiint_S \vec{E}.\overrightarrow{dS}$$

Ainsi, il vient :

$$\oiint_S \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \text{ avec } Q_{int} = \iiint_V \rho.d\tau$$

On retrouve ici le théorème de Gauss. Cette équation exprime le fait que les charges électriques sont à l'origine de $\vec{E}$. En effet, $\vec{E}$ est divergent ou convergent selon le signe de ρ.

Le théorème de Gauss est donc valable à la fois en régime permanent et en régime variable.

2.4 Équations de Maxwell

2.4.3 Contenu physique des équations de Maxwell

Le théorème d'Ampère généralisé

On calcule la circulation à un instant donné du champ magnétique le long d'un contour fermé C sur lequel s'appuie une surface S à travers l'application du théorème de Stokes :

$$\oint_C \vec{B}.\overrightarrow{dl} = \iint_S \overrightarrow{rot}(\vec{B}).\overrightarrow{dS}$$

En utilisant l'équation de Maxwell Ampère, il vient :

$$\oint_C \vec{B}.\overrightarrow{dl} = \iint_S (\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}).\overrightarrow{dS}$$

Ainsi on a :

$$\oint_C \vec{B}.\overrightarrow{dl} = \mu_0 (i + \iint_S \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \overrightarrow{dS})$$

avec i, intensité de courant en A : $i = \iint_S \vec{j}.\overrightarrow{dS}$.

On pose $i_D = \iint_S \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.\overrightarrow{dS}$ qui s'interprète comme le courant de déplacement à travers la surface S.

2.4 Équations de Maxwell

2.4.3 Contenu physique des équations de Maxwell

Équation du flux magnétique et champ magnétique à flux conservatif

En intégrant dans un volume V l'équation de Maxwell Flux, on a :

$$\iiint div(\vec{B}).d\tau = 0.$$

Ensuite en appliquant le théorème d'Ostrogradsky, il vient :

$$\oiint \vec{B}.\vec{dS} = 0$$

Le flux de $\vec{B}$ est nul. Autrement dit, $\vec{B}$ est à flux conservatif. Plusieurs interprétations :

1. Il n'existe pas de "charge magnétique" à l'origine de $\vec{B}$.
2. Pas de divergence (ni convergence) des lignes de champ magnétique.

2.4 Équations de Maxwell

2.4.3 Contenu physique des équations de Maxwell

Équation de Maxwell-Faraday et loi de Faraday

On évalue la circulation, que l'on note e du champ électrique le long d'un contour C fermé sur lequel s'appuie une surface S :

$$e = \oint_C \vec{E}.\overrightarrow{dl}$$

En utilisant le théorème de Stokes puis l'équation de Maxwell Faraday, il vient :

$$e = \iint_S \overrightarrow{rot}\vec{E}.\overrightarrow{dS} = \iint_S \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)\overrightarrow{dS} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}\overrightarrow{dS}$$

$$\iint_S \vec{B}\overrightarrow{dS} = \Phi$$

Ce qui donne : $\boxed{e = -\frac{d\Phi}{dt}}$

Φ flux de champ magnétique à travers S

e est appelée force électromotrice (f.é.m) en Volt. Cette équation, appelée loi de Faraday, traduit le phénomène d'induction que l'on étudiera dans le chapitre suivant.

2.4 Équations de Maxwell

2.4.4 Propriétés et conséquences des équations de Maxwell

Principe de superposition

Les équations de Maxwell sont des équations **linéaires**

Cohérence des équations

Chacune des équations de Maxwell étudiée séparément permet de rendre compte de phénomènes physiques (voir section 3).

En considérant l'ensemble de ces 4 équations comme une unité permettant de décrire le comportement de l'onde EM, on observe que d'autres informations sont contenues.

Ainsi,on va démontrer qu'on retrouve l'équation de conservation de la charge dans les équations de Maxwell :

voir poly de cours pour la démo

ITÉ

2.4 Équations de Maxwell

2.4.4 Propriétés et conséquences des équations de Maxwell

Existence d'ondes électromagnétiques

En électrostatique, le champ électrique est dû à la présence de charges électriques.
En magnétostatique, le champ magnétique est dû à la présence de courants électriques.
En régime variable (temporellement), on peut écrire Maxwell Faraday :

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Si le champ magnétique dépend du temps on peut avoir un champ électrique avec une densité de charges électriques ρ nulle. Il suffit qu'il y ait un courant électrique :

$\vec{j}$ dépend de t ainsi $\vec{E}$ dépend de t, ainsi $\vec{B}$ dépend de t.

2.4 Équations de Maxwell

2.4.5 Existence des potentiels V et $\vec{A}$

L'équation de Maxwell flux magnétique permet de définir un champ vectoriel $\vec{A}$ appelé potentiel vecteur, tel que :

$$\boxed{\vec{B} = \overrightarrow{rot}(\vec{A})}$$

Rappel : $\forall \vec{A},\ div(\overrightarrow{rot}\vec{A}) = 0$

Concernant $\vec{E}$, il vient en utilisant l'équation de Maxwell Faraday :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{rot}\vec{A}) \Rightarrow \overrightarrow{rot}(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = \vec{0}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$

2.4 Équations de Maxwell

2.4.6 Cas particulier des régimes permanents

Équation de conservation de la charge

En régime permanent : $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow ♥\ div(\vec{j}) = 0.$

Ainsi, $\vec{j}$ est à flux conservatif. Par conséquent l'intensité de courant est la même en tout point d'une branche , c'est le cas du régime continu.

La loi des nœuds découle également de cette même équation ie :

$$\sum_k i_k = 0$$

soit la somme des intensités algébriques dans un nœud est égale à zéro.

2.4 Équations de Maxwell

2.4.6 Cas particulier des régimes permanents

Équations de Maxwell en régime permanent

$$div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$div(\vec{B}) = 0$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$$

voir poly de cours pour plus de détails

Potentiel scalaire V et potentiel vecteur $\vec{A}$

Dans le cas du régime permanent, on a $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{0}$ $\Rightarrow$ $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$

2.4 Équations de Maxwell

2.4.6 Cas particulier des régimes permanents

Équations de Poisson

En régime permanent, le potentiel électrique obéit à l'équation de Poisson :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

En régime permanent, le potentiel vecteur $\vec{A}$ obéit à l'équation de Poisson :

$$\vec{\Delta}\vec{A} + \mu_0 \vec{j} = \vec{0}$$

Voir TD pour établissement de ces équations à partir des équations de Maxwell.

2.4 Équations de Maxwell

2.4.7 Relations de passage du champ électromagnétique

Le champ électrique

Soient deux milieux notés 1 et 2 séparés par une surface chargée σ.

$$\Delta \vec{E} = \vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{1\to 2}$$

- Seule la composante de $\vec{E}$ normale à la surface de séparation des deux milieux est discontinue.
- La composante tangentielle de $\vec{E}$ est continue.

Le champ magnétique

Soient deux milieux notés 1 et 2 séparés par une surface parcourue par des courants surfaciques (caractérisés par $\vec{j}_s$).

$$\Delta \vec{B} = \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1\to 2}$$

- Continuité de la composante normale de $\vec{B}$.
- Discontinuité de la composante tangentielle de $\vec{B}$.

Bibliographie

- [1] Polycopié de cours, Abdelaziz Boumiz *Polycopiés d'électromagnétisme II*, EISTI
- [2] CUPGE - CY : Introduction à l'électromagnétisme
- [3] Cours LP 203 - Champs électrique et magnétique de Nicolas MENGUY
- [4] Cours de Luc Tremblay, collège Mérici - « Électricité et magnétisme ».
- [5] David Sénéchal - « Histoire des sciences » PHQ399 Université de Sherbrooke, QC
- [6] pour la suite : Khan Academy , Unisciel etc.
- [7] Polycopié de Lucie Desplat – Pau
- [8] Jean-Marie BREBEC, Électromagnétisme 1ère année MPSI PCSI PTSI , Hachette