5 Travail et énergie

■ Travail d'une force

➢ Lors d'un déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$, le travail de la force $\vec{F}$ s'écrit :

$$\boxed{\delta W_{\vec{F}} = \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM} = \vec{F} \cdot \vec{v}\ dt}$$

En coordonnées cartésiennes : $\delta W_{\vec{F}} = F_x\ dx + F_y\ dy + F_z\ dz$.

➢ Lors d'un déplacement de A à B le long du chemin Γ, le travail de la force $\vec{F}$ s'écrit :

$$\boxed{W_{\vec{F},A\to B} = \int_A^B \delta W_{\vec{F}} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM}}$$

où l'intégrale est calculée le long du chemin Γ.

➢ Le travail est une **énergie**, il s'exprime en **joule** (J).

➢ Si $W > 0$, le travail est **moteur**.
Si $W < 0$, le travail est **résistant**.

➢ Les forces $\perp \vec{v}$ ne travaillent pas. Donc la force de contact normale $\vec{N}$ ne travaille pas !

⚠ Le travail d'une force de frottement dynamique est toujours résistant car $\vec{f_d}$ est dirigée selon $-\vec{v}$!

■ Puissance d'une force

➢ **Puissance moyenne** de la force $\vec{F}$: $\boxed{\mathcal{P}_{moy} = \dfrac{W_{\vec{F},A\to B}}{t_B - t_A} = \dfrac{W_{\vec{F}}}{\Delta t}}$

➢ **Puissance instantanée** de la force $\vec{F}$: $\boxed{\mathcal{P}_{\vec{F}} = \dfrac{\delta W_{\vec{F}}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}}$

➢ La puissance est une énergie divisée par un temps ; elle s'exprime en **watt** (W).

➢ On peut exprimer le travail en fonction de $\mathcal{P}_{\vec{F}}$: $\boxed{W_{\vec{F},A\to B} = \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{P}_{\vec{F}}(t)\ dt}$.

■ Théorème de l'énergie cinétique

➢ **L'énergie cinétique** d'un point matériel de masse m est définie par : $\boxed{E_c = \dfrac{1}{2} m v^2}$

➢ **Le théorème de l'énergie cinétique** s'écrit *dans un référentiel galiléen* :

$$\boxed{\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \sum W_{A\to B}}$$

ou encore :

$$\boxed{\frac{dE_c}{dt} = \sum \mathcal{P}}$$

où $\sum W_{A\to B}$ et $\sum \mathcal{P}$ désignent la somme des travaux et des puissances de *toutes* les forces appliquées sur le corps pendant le déplacement de A vers B.

⚠ Il faut toujours préciser l'état initial et l'état final quand on applique le théorème de l'énergie cinétique.

■ Energie potentielle

➢ La force $\vec{F}$ **dérive d'une énergie potentielle** ssi il existe une fonction $E_p(M)$ appelée **énergie potentielle** telle que :

$$\boxed{\delta W_{\vec{F}} = -\,dE_p}$$

➢ L'énergie potentielle est définie à une constante près, que l'on prendra par convention $= 0$.

➢ **Energie potentielle de la pesanteur** : $\boxed{E_p = mgz}$ (*avec l'axe z orienté vers le haut !*).

➢ **Energie potentielle élastique d'un ressort** : $\boxed{E_p = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2}$.

■ Forces conservatives

➢ Une **force conservative** est une force qui dérive d'une énergie potentielle.

➢ Si $\vec{F}$ est conservative alors : $\boxed{W_{\vec{F},A\to B} = -\,\Delta E_p = E_p(A) - E_p(B)}$.

➢ $\boxed{\vec{F} \text{ conservative } \iff W_{\vec{F}} \text{ ne dépend pas du chemin suivi}}$.

➢ Le **poids** et la **force élastique du ressort** sont des forces conservatives.

➢ Un **système est dit conservatif** ssi il est soumis uniquement à des forces conservatives ou qui ne travaillent pas.

■ Force non conservative

➢ Une **force non conservative** est une force qui ne dérive pas d'une énergie potentielle.

➢ Le travail d'une force non conservative **dépend donc du chemin suivi**.

➢ Les **forces de frottement** sont des forces non conservatives.

■ Théorème de l'énergie mécanique

➢ **L'énergie mécanique** est définie par : $\boxed{E_m = E_c + E_p}$, où E_p est la somme des énergies potentielles de toutes les forces conservatives.
Elle est définie à une constante près, que l'on prendra par convention $= 0$.

➢ **Le théorème de l'énergie mécanique** s'écrit *dans un référentiel galiléen* :

$$\boxed{\Delta E_m = E_m(B) - E_m(A) = \sum W_{n.c.,A\to B}}$$

ou encore :

$$\boxed{\frac{dE_m}{dt} = \sum \mathcal{P}_{n.c.}}$$

où $\sum W_{n.c.,A\to B}$ et $\sum \mathcal{P}_{n.c.}$ désignent la somme des travaux et des puissances de *toutes* les forces non conservatives agissant sur le système lors du déplacement de A vers B.

➢ Pour un **système conservatif** : $\sum W_{n.c.} = 0 \Rightarrow \boxed{E_m = \text{cste}}$.

⚠ Il faut toujours préciser l'état initial et l'état final quand on applique le théorème de l'énergie mécanique et répertorier les forces conservatives (et leur E_p) et les forces non conservatives s'il y en a !

■ Positions d'équilibre - stabilité

- ➢ Une **position d'équilibre** est une position où : $\sum \vec{F} = \vec{0}$.
- ➢ Si on écarte légèrement le corps de sa position d'équilibre et qu'il y revient : la position d'équilibre est **stable**.
- ➢ Si on écarte légèrement le corps de sa position d'équilibre et qu'il s'en écarte : la position d'équilibre est **instable**.

■ Système conservatif à un degré de liberté

- ➢ Système conservatif à un degré de liberté x : il est soumis à une force résultante $\vec{F}(x) = F(x)\,\vec{u}_x$ telle que $\boxed{F(x) = -\dfrac{dE_p}{dx}}$ et son énergie $\boxed{E_m(x) = E_c(x) + E_p(x) = \text{cste}}$.
- ➢ Les **minimas** de $E_p(x)$ correspondent aux positions d'équilibre **stables**.
  Les **maximas** de $E_p(x)$ correspondent aux positions d'équilibre **instables**.
- ➢ Les valeurs de x autorisées correspondent à $E_c(x) \geq 0$ càd à $E_p(x) \leq E_m$.
- ➢ Le signe de la pente de $E_p(x)$ donne **le sens de** $\vec{F}$.
- ➢ Les **points de rebroussement** sont les points où $\vec{v} = \vec{0}$, càd $E_p(x) = E_m$: le corps repart alors dans la direction de $\vec{F}$.