Mécanique du point matériel

PI1-MI/GC/GCA — CC3 — 2023/2024

Durée : 1h30' (2h en cas de tiers-temps)

Sont interdits :
- les documents ;
- tous les objets électroniques (calculatrice, téléphone, tablette, ordinateur...) de même que les montres connectées ;
- les déplacements et les échanges.

Consignes :
Seules les dernières feuilles doivent être rendues :

1. la feuille-réponse du QCM :
   (a) y indiquer vos nom, prénom et groupe dès le début officiel de l'épreuve ;
   (b) remplir complètement au stylo noir la case correspondant à la bonne réponse (une case simplement cochée ne sera pas comptabilisée) ;
   (c) chaque question ne comporte qu'une seule réponse correcte ;
   (d) il n'y a pas de point négatif pour une réponse incorrecte ;
2. le cas échéant, les feuilles de réponses aux questions ouvertes (icône ♣).

Le cas échéant, vos réponses doivent être justifiées.
Une attention particulière sera portée à la qualité et au soin de la rédaction.

Vérifier que ce document comporte 8 pages et 16 questions.

Le barème est donné à titre indicatif et est susceptible d'être modifié.

Considérations générales *(5 points)*

Dans un référentiel galiléen, on considère le mouvement unidimensionnel (selon x) d'un point matériel M soumis à une force conservative dérivant d'une énergie potentielle E_p.

Question 1 [`CgEq`] *(1 point)*
Si x_{eq} est une position d'équilibre de M, alors $\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}(x_{eq})$:

- ■ $= 0$
- B < 0
- C > 0
- D On ne peut pas conclure.

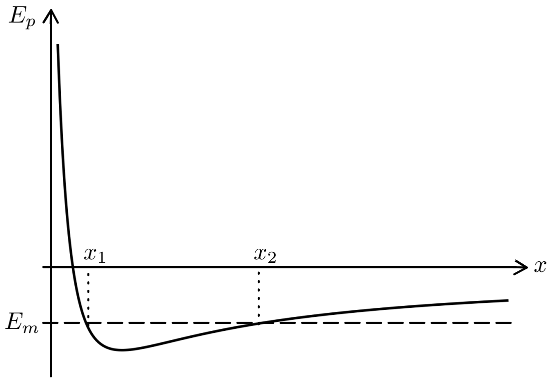
Question 2 [`CgEqSt`] *(1 point)*
Si x_{eq} est une position d'équilibre de M et $\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}(x_{eq}) > 0$, alors cet équilibre est :

- ■ stable
- B instable
- C ni stable, ni instable
- D On ne peut pas conclure.

Question 3 [`CgHa`] *(1 point)*
L'approximation harmonique est réalisable au voisinage :

- ■ d'une position d'équilibre stable uniquement
- B d'une position d'équilibre instable uniquement
- C de toute position d'équilibre
- D de toute position
- E Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

La figure ci-dessous représente E_p en fonction de x, ainsi que l'énergie mécanique E_m de M (tirets).



Question 4 [`CgLie`] *(1 point)*
D'après la figure, M se trouve dans un état :

- ■ lié
- B de diffusion (ou non-lié)
- C de désintégration
- D On ne peut pas conclure.

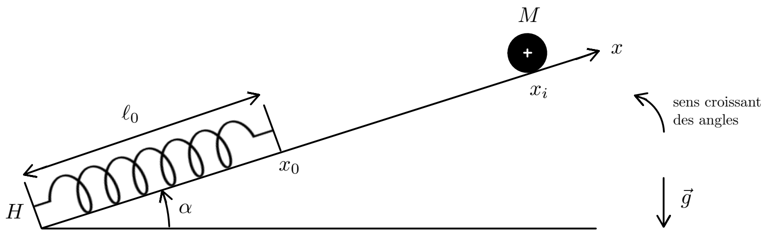
Question 5 [`CgEc`] *(1 point)*
L'énergie cinétique de M en x_1 et x_2 est :

- ■ nulle
- B strictement positive
- C strictement négative
- D On ne peut pas conclure.

Flipper *(5 points)*

Dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$, approximé galiléen, on considère la situation suivante (fig. ci-dessous) : le système de lancement d'un flipper est assimilé à un plan incliné d'angle α par rapport à l'horizontale, en bas duquel se trouve un ressort idéal de raideur k et longueur à vide ℓ_0 dont l'extrémité H est fixe.

Un joueur vient de rater le lancer de sa bille, qui n'a pas pu entrer en jeu. La bille, assimilée à un point matériel M de masse m, se trouve à l'instant initial à la position x_i avec une vitesse nulle. On note g la norme du champ de pesanteur et on néglige tout frottement.



Question 6 [`PbFliQ0`] *(1 point)*
Au cours du mouvement de M, le travail de la réaction normale du support est :

- ■ nul
- B strictement négatif
- C strictement positif
- D On ne peut pas conclure.

Question 7 [`PbFliQ1`] *(1 point)*
La vitesse $\|\vec{v}(x_0)\|$ de la bille atteignant l'extrémité supérieure du ressort est égale à :

- ■ $\sqrt{2\,g\,(x_i - x_0)\,\sin(\alpha)}$
- B $\sqrt{2\,g\,(x_0 - x_i)\,\cos(\alpha)}$
- C $\sqrt{2\,g\,(x_i - x_0)\,\cos(\alpha)}$
- D $2\sqrt{g\,(x_i - x_0)\,\sin(\alpha)}$
- E Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Question 8 [`PbFliQ2`] *(1 point)*
L'énergie potentielle élastique d'un ressort de raideur k, longueur à vide ℓ_0 et longueur ℓ, est égale à :

- ■ $\frac{1}{2}\,k\,(\ell - \ell_0)^2 + \text{constante}$
- B $\frac{1}{2}\,k\,\ell^2 + \text{constante}$
- C $-\frac{1}{2}\,k\,(\ell - \ell_0)^2 + \text{constante}$
- D Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Question 9 [`PbFliQ3`] *(1 point)*
Soit x_{min} la position minimale atteinte par M au cours de son mouvement. On a alors :

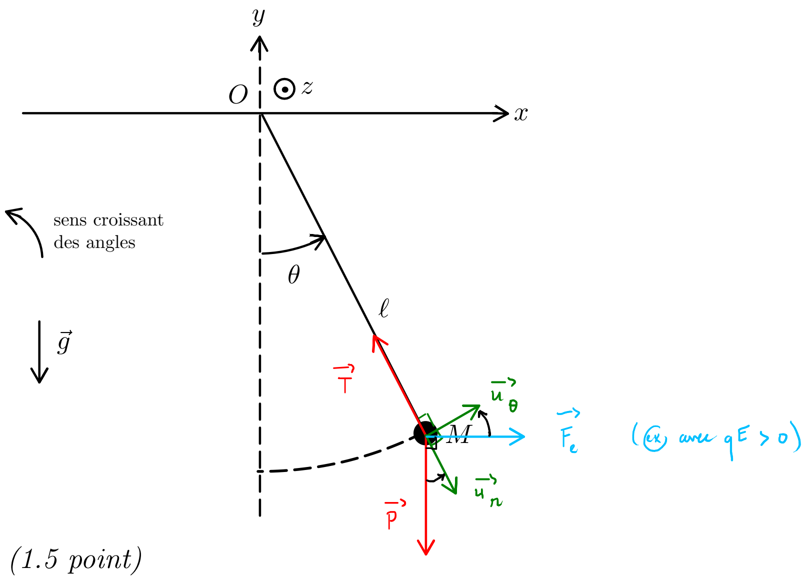
- ■ $\frac{1}{2}\,k\,(x_{min} - x_0)^2 + m\,g\,(x_{min} - x_i)\,\sin(\alpha) = 0$
- B $\frac{1}{2}\,k\,(x_{min} - x_0)^2 + m\,g\,(x_{min} - x_0)\,\sin(\alpha) = 0$
- C $\frac{1}{2}\,k\,(x_{min} - x_0)^2 + m\,g\,(x_{min} - x_0)\,\cos(\alpha) = 0$
- D $\frac{1}{2}\,k\,(x_{min} - x_0)^2 - m\,g\,(x_{min} - x_i)\,\cos(\alpha) = 0$
- E Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Question 10 [`PbFliQ4`] *(1 point)*
En présence de frottements, la nouvelle position x_{min} serait, par rapport au cas sans frottement :

- ■ strictement supérieure
- B strictement inférieure
- C égale
- D On ne peut pas conclure.

Pendule *(8 points)*

Dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$, approximé galiléen, on considère la situation suivante (fig. ci-dessous) : un point matériel M de masse m, attaché à un fil idéal de longueur ℓ dont l'autre extrémité est fixe en O, oscille sur une trajectoire circulaire dans le plan vertical (Oxy).
On note θ l'angle d'inclinaison du fil par rapport à la verticale à l'instant t et g la norme du champ de pesanteur. On néglige tout frottement.
Les résultats sont à exprimer en fonction des données de l'énoncé.



Question 11 **[PbPenQ0]** ♣ *(1.5 point)*
Exprimer $\vec{L}_O(M)$, moment cinétique de M par rapport à O.

Question 12 **[PbPenQ1]** ♣ *(1 point)*
Énoncer le théorème du moment cinétique (sous sa forme générale).

Question 13 **[PbPenQ2]** ♣ *(2.5 points)*
En déduire que l'équation du mouvement de M selon la direction orthoradiale peut s'écrire :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin(\theta) = 0$$

Question 14 **[PbPenQ3]** ♣ *(1 point)*
Déterminer la (les) valeur(s) de $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ telle(s) que l'accélération angulaire s'annule.

Un dispositif permet maintenant d'appliquer un champ électrique uniforme et constant $\vec{E} = E\,\vec{u}_x$ dans tout l'espace. M porte une charge q et on suppose que sa trajectoire demeure circulaire dans le plan (Oxy).

Question 15 **[PbPenQ4]** ♣ *(1 point)*
Établir la nouvelle équation du mouvement de M selon la direction orthoradiale.

Question 16 **[PbPenQ5]** ♣ *(1 point)*
En déduire que l'accélération angulaire s'annule pour $\tan(\theta) = \dfrac{q\,E}{m\,g}$.
Ce résultat est-il en accord avec celui obtenu à la question 14 ?

Mécanique du point matériel - PI1-MI/GC/GCA - CC3 - 2023/2024

NOM : ....

Prénom : ....

Groupe : ....

CODAGE DU N°ÉTUDIANT
(colorier complètement les cases)

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

SENS DE REMPLISSAGE →

Les réponses au QCM ne doivent être apportées que sur cette feuille.
La copie ne sera corrigée que si :

- **elle comporte vos nom, prénom et groupe ;**
- **les cases sont complètement coloriées avec un stylo noir ;**
- **la feuille-réponse ne comporte pas de ratures.**

Question 1	■	B	C	D	
Question 2	■	B	C	D	
Question 3	■	B	C	D	E
Question 4	■	B	C	D	
Question 5	■	B	C	D	
Question 6	■	B	C	D	
Question 7	■	B	C	D	E
Question 8	■	B	C	D	
Question 9	■	B	C	D	E
Question 10	■	B	C	D	

Question 11 $\vec{L}_O(M)$ ■ ■ ***Réservé à l'enseignant(e)***

$$\vec{L}_O(M) = m\,\vec{OM} \wedge \vec{v} \overset{\text{cylindriques}}{=} m \begin{pmatrix} \ell \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \ell\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{mvmt circulaire}} = m\,\ell^2\,\dot{\theta}\,\vec{u}_z \qquad (1)$$

Question 12 Th. $\vec{L}$ ■ ■ ***Réservé à l'enseignant(e)***

Dans $\mathcal{R}$ galiléen, où A est un pt immobile :

$$\frac{d\vec{L}_A(M)}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}_{ext \to M}) \qquad (\text{ou expression } \Leftrightarrow)$$

Question 13 Équation du mvmt (1) ■ ■ ■ ***Réservé à l'enseignant(e)***

Dans $\mathcal{R}_T$ ≃ galiléen, où O est fixe :

$$\frac{d\vec{L}_O(M)}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) \qquad (2)$$

avec
$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{L}_O(M)}{dt} \overset{(1)}{=} m\,\ell^2\,\ddot{\theta}\,\vec{u}_z \\ \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = \vec{OM} \wedge \vec{P} = \begin{pmatrix} \ell \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge mg \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} = -mg\,\ell\,\sin(\theta)\,\vec{u}_z \\ \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) \propto \vec{u}_r \wedge \vec{u}_r = \vec{0} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ (2) sur $\vec{u}_z$: $\ddot{\theta} + \dfrac{g}{\ell}\sin(\theta) = 0 \qquad (3)$

Question 14 $\theta(\ddot\theta = 0)$ (1) *Réservé à l'enseignant(e)*

(3) : $\ddot\theta = 0 \Rightarrow \sin(\theta) = 0 \Rightarrow \theta = 0$ (ds $[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$)

Question 15 Équation du mvmt (2) *Réservé à l'enseignant(e)*

On reprend (2) avec le terme supplémentaire :

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F_e}) = qE \begin{pmatrix} \ell \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} = qE\ell \cos(\theta) \vec{u_z}$$

$\Rightarrow$ (2) sur $\vec{u_z}$: $\ddot\theta + \frac{g}{\ell} \sin(\theta) - \frac{qE}{m\ell} \cos(\theta) = 0$ (3')

Question 16 $\theta(\ddot\theta = 0)$ (2) *Réservé à l'enseignant(e)*

(3') : $\ddot\theta = 0 \Rightarrow \tan(\theta) = \frac{qE}{mg}$ (N.B. : le symétrique de cet angle par rapport à la verticale ne satisfait pas $\ddot\theta = 0$; cohérent, à cause de l'asymétrie causée par $\vec{E} = E\vec{u_x}$)

si $\vec{E} = \vec{0}$, $\tan(\theta) = 0 \Rightarrow \theta = 0$; on retrouve bien le résultat obtenu en q.14.

Flipper

Ds $\mathcal{R}_T \simeq$ galiléen :

6/ $\forall t,\ \vec{R}_N \perp d\vec{OM} \Rightarrow \delta W(\vec{R}_N) = 0$

7/ Th de l'E_c sur M entre x_i et x_0 :

$$\frac{1}{2} m \left[v^2(x_0) - \underbrace{v^2(x_i)}_{=0}\right] = \left\{\begin{matrix} W(\vec{P}) \\ -\Delta E_p(\vec{P}) \end{matrix}\right\} + \underbrace{W(\vec{R}_N)}_{=0} = -mg\,(z_0 - z_i) = mg\,(x_i - x_0)\sin(\alpha) > 0 \ : \text{cohérent}$$

$$\Rightarrow \quad \|\vec{v}(x_0)\| = \sqrt{2g\,(x_i - x_0)\sin(\alpha)}$$

8/ cf. CM

9/ Th de l'E_c sur M entre x_i et x_{min} :

$$\frac{1}{2} m \left[\underbrace{v^2(x_{min})}_{=0} - \underbrace{v^2(x_i)}_{=0}\right] = \left\{\begin{matrix} W_{x_i \to x_{min}}(\vec{P}) \\ -\Delta E_p(\vec{P}) \end{matrix}\right\} + \underbrace{W(\vec{R}_N)}_{=0} + \left\{\begin{matrix} W_{x_0 \to x_{min}}(\vec{F}_k) \\ -\Delta E_p(\vec{F}_k) \end{matrix}\right\}$$

$$= mg\,(x_i - x_{min})\sin(\alpha) - \frac{1}{2} k \left[\Big(\underbrace{|x_{min} - x_H| - |x_0 - x_H|}_{= x_{min} - x_0}\Big)^2 - \Big(\underbrace{|x_0 - x_H| - |x_0 - x_H|}_{=0}\Big)^2\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} k\,(x_{min} - x_0)^2 + mg\,(x_{min} - x_i)\sin(\alpha) = 0$$

10/ En présence de frottements $\vec{f}$, on ajoute un terme $W(\vec{f}) < 0$ ds le th de l'E_c

$\Rightarrow$ la compression max du ressort est ⊕ faible que précédemment

$\Rightarrow$ x_{min} (avec $\vec{f}$) $>$ x_{min} (sans $\vec{f}$) .