TD 6 - Intégration

Calcul intégral

Exercice 1. -
Soit f la fonction définie sur $[0, 4]$ par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ -2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 4 & \text{si } 2 < x \leq 4. \end{cases}$$

1. Calculer $\int_0^4 f(t)\, dt$.
2. Soit $x \in [0, 4]$, calculer $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$.
3. Montrer que F est une fonction continue sur $[0, 4]$. La fonction F est-elle dérivable sur $[0, 4]$?

Exercice 2. -
Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^3 |2t - 5|\ dt$,
2. $\displaystyle\int_0^\pi \sqrt{E(t)}\ dt$,
3. $\displaystyle\int_0^\pi Min(2, t)\ dt$,
4. $\displaystyle\int_{-1}^2 t|t|\ dt$.

Exercice 3. -
Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx \quad ; \quad \int 3x\sqrt{1+x^2}dx \quad ; \quad \int \frac{1}{x\ln x}dx \quad ; \quad \int \frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}dx \quad ; \quad \int \cos(x)\sin^2(x)dx$$

$$\int \frac{1-x^2}{(x^3-3x+1)^3}dx \quad ; \quad \int \frac{x-1}{\sqrt{x(x-2)}}dx \quad ; \quad \int \frac{1}{x\ln(x^2)}dx \quad ; \quad \int (3x-1)(3x^2-2x+3)dx$$

$$\int \frac{\ln x}{x}dx \quad ; \quad \int (1-\cos(3x))dx \quad ; \quad \int x\sin(x^2)dx \quad ; \quad \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$$

Exercice 4. -
(Intégration par parties) Calculer les primitives suivantes :

$$\int e^x \cos x dx \quad ; \quad \int \frac{\ln x}{x^n} dx \ n > 1 \quad ; \quad \int x \text{Arctan}\, x dx \quad ; \quad \int (x^2+x+1)e^x dx.$$

$$\int e^{-x} \sin x dx \quad ; \quad \int (\ln x)^2 dx \quad ; \quad \int \text{Arctan}\, x dx \quad ; \quad \int x^3 \sin x dx.$$

Exercice 5. -
Calculer les primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt[3]{2+x}} dx, \quad (t = \sqrt[6]{2+x})$
2. $\displaystyle\int (\arcsin x)^2 dx$
3. $\displaystyle\int x^2\sqrt{1+x^3} dx.$
4. $\displaystyle\int \frac{e^x}{(3+e^x)\sqrt{e^x-1}} dx$
5. $\displaystyle\int \cos\sqrt{x} dx.$
6. $\displaystyle\int \frac{1+e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$
7. $\displaystyle\int \frac{e^{\tan x}}{(\cos x)^2} dx$
8. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$

Exercice 6. -
Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\ dt \quad ; \quad \int_0^a \sqrt{a^2-t^2}\ dt \quad ; \quad \int_0^\pi t^2 \sin t\ dt \quad ; \quad \int_{1-\frac{\pi^2}{4}}^1 \cos\sqrt{1-t}\ dt$$

$$\int_{-1}^1 \frac{t-1}{1+t^2}\ dt \quad ; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2+\sin t} \quad ; \quad \int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\ dt \quad ; \quad \int_1^4 \frac{dt}{1+e^t} \quad ; \quad \int_0^1 t(Arctant)^2 dt$$

Exercice 7. -
(Changement de variable) calculer les intégrales suivantes : Considérons l'intégrale

$$I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\, dx$$

Effectuer le changement de variables $u = \sqrt{e^x-1}$ et calculer I.

Résultat : $I = 2 - \pi/2$.

Exercice 8. -
1- Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$, en déduire le valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan(x))dx.$$

2-Montrer que

$$\int_{\frac{1}{a}}^{a} (1+\frac{1}{x^2}) \arctan x\ dx = \frac{\pi}{2}(a-\frac{1}{a})$$

pour $a > 1$,
(Indication : utiliser la formule $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, pour $x > 0$).

Exercice 9. -
Décomposer les fractions rationnelles suivantes ; en calculer les primitives.

1. $\dfrac{x^3}{x^2-4}$.
2. $\dfrac{4x}{(x-2)^2}$.
3. $\dfrac{3t+1}{t^2-2t+10}$.
4. $\dfrac{1}{t^3+1}$.
5. $\dfrac{x^3+2}{(x+1)^2}$.
6. $\dfrac{x+1}{x(x-2)^2}$.
7. $\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2(x^2+1)}$.

Calcul des suites

Exercice 10. -
Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n dt$.

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
2. Calculer I_n.

Exercice 11 (Intégrales de Wallis)**. -**
Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$.

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.
2. En déduire I_{2p} et I_{2p+1}.
3. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et strictement positive.
4. En déduire que $I_n \sim I_{n+1}$.
5. Calculer nI_nI_{n+1}.
6. Donner alors un équivalent simple de I_n.

Exercice 12. -

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

1. En majorant la fonction intégrée, montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$.
2. Calculer $I_n + I_{n+1}$.
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k})$.

Exercice 13. -
Calculer :

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} \; ; \; \lim_{n\to\infty} n \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-\frac{n}{k}}}{k^2} \; ; \; \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2} \; ; \; \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}.$$

Exercice 14. -
Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{p=1}^{n} \dfrac{n}{n^2+p^2}$.

Exercice 15. -
Sans calculer les intégrales, montrer que

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \; dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \; dx.$$

Pour aller plus loin

Exercice 16. -
Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$. On définit $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

1. Montrer que g se prolonge par continuité en 0.
2. On suppose f T-périodique. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{kT}^{(k+1)T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$.
3. Ecrire $g(x)$ sous la forme $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{nT} f(t)dt + \dfrac{1}{x}\int_{nT}^{x} f(t)dt$ pour un entier n bien choisi, et en déduire que g admet une limite en $+\infty$.

Exercice 17. -
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.
Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

1. F est continue sur $\mathbb{R}$.
2. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f.
3. Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Si f est positive sur $\mathbb{R}$ alors F est positive sur $\mathbb{R}$.
5. Si f est positive sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.
6. Si f est T-périodique sur $\mathbb{R}$ alors F est T-périodique sur $\mathbb{R}$.
7. Si f est paire alors F est impaire.

Exercice 18. -
Déterminer les fonctions f continues sur $[a, b]$ telles que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = (b-a)\sup_{[a,b]} |f|$.