

TD 5 - Analyse asymptotique

Partie I - Comparaison des suites :

Exercice 1. -

Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n = O(v_n)$.
2. Si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$ alors $u_n \sim v_n$.
3. Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n - v_n = o(v_n)$ et $(u_n - v_n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.
4. $\frac{3^n}{n} = O(2^n)$

Exercice 2. -

Donner des équivalents simples des suites ci-dessous :

1. $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$
2. $v_n = \ln(n + \sqrt{n^2 + 1})$
3. $w_n = \sqrt{1 + \sqrt{n}}$
4. $x_n = \sqrt{n^3 + 2n^2} - \sqrt{n^3 + n^2}$
5. $y_n = \sin\left(\frac{n^2 + n + 1}{n + 1}\pi\right)$

Exercice 3. -

Déterminer les limites suivantes en utilisant des équivalents.

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, x \in \mathbb{R}$
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^2}$
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{n^2 + 2n + 3}{n + 1}\pi\right)$
4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{n^2 + 2n + 3} - \sqrt{n^2 + n + 1}\right)$

Exercice 4. Déterminer un équivalent le plus simple possible de chacune des suites suivantes quand n tend vers $+\infty$.

1. $(1 + \sqrt{n})^{-\sqrt{n}}$.
2. $\ln(\cos \frac{1}{n})(\ln \sin \frac{1}{n})$.
3. $\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$.
4. $e^{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$.

Exercice 5. Montrer que $\sum_{k=0}^n k! \sim n!$.

Exercice 6. -

Soit s_n une suite de réels de limite 0 et telle que : $s_n + s_{n+1} \sim \frac{1}{n}$.

1. On suppose que (s_n) est décroissante, montrer que $s_n \sim \frac{1}{2n}$.
 2. En considérant la suite $\left(\frac{1}{2n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)_{n \geq 1}$, prouver que ce résultat est en défaut si (s_n) n'est pas décroissante.
-

Partie II - Comparaison de fonctions :

Exercice 7. -

À quelle condition sur f et g a-t-on $e^f \underset{a}{\sim} e^g$?

Exercice 8. -

Soient f et g équivalentes au voisinage de a et strictement positives. Montrer que si f admet en a une limite dans $\mathbb{R}$ différente de 1 alors $\ln f \underset{a}{\sim} \ln g$.

Exercice 9. -

Calculer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x + 3x^2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^4)}{x(\tan(x) - \sin(x))}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x+1} \ln \left(1 - \frac{\sqrt{x+1}}{x+2} \right)$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x^2} - 1}{\ln(\cos(x))}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 3x^2 + x}{2x^3 + x^2}$$

Exercice 10. -

Calculer les limites de

$$1. \frac{\sin x \ln(1+x^2)}{x \tan x} \text{ en } 0.$$

$$2. \frac{\ln(1+\sin x)}{\tan(6x)} \text{ en } 0.$$

$$3. (\ln(e+x))^{\frac{1}{x}} \text{ en } 0.$$

$$4. (\ln(1+e^{-x}))^{\frac{1}{x}} \text{ en } +\infty.$$

Exercice 11. -

Déterminer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ où } f(x) = \left((x+1) - \sqrt[3]{x^3+1} \right)$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \exp \left(\frac{(1 - \cos x) \sin x}{x^3} \right)$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{1 - \cos 2x}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x} \right)^{x \ln x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln\left(\frac{2x}{\pi}\right)}{\cos x}$$

Exercice 12. Calculer la limite et l'équivalent des fonctions suivantes :

$$\sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 - x^2} \quad \text{en } +\infty$$

$$\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} - x\sqrt{2} \quad \text{en } +\infty$$

$$\frac{\tan(ax) - \sin(ax)}{\tan(bx) - \sin(bx)} \quad \text{en } 0$$

$$\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{en } \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\cos(x) - \sin(x)}{(4x - \pi) \tan(x)} \quad \text{en } \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\tan(x - x \cos(x))}{\sin(x) + \cos(x) - 1} \quad \text{en } 0$$

$$x^{\frac{1}{1+2 \ln(x)}} \quad \text{en } 0$$

$$(2x^2 - 3x + 1) \tan(\pi x) \quad \text{en } \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sin(\frac{1}{x})} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \quad \text{en } +\infty$$

Partie III - Développements limités :

Exercice 13. -

Déterminer les ordres pour lesquels les fonctions suivantes admettent un DL en 0 :

1. $x \mapsto \sqrt{x}$.
2. $x \mapsto x^{\frac{17}{4}}$.
3. $x \mapsto |x|^n$.

Exercice 14. -

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $f(x) = \exp\left(\frac{-1}{x}\right)$ sinon. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le développement limité de f en 0. Quelles conclusions en tirer ?
2. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(0) = 0$ et, si $x \neq 0$: $g(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Montrer que g a un développement limité d'ordre 2 en 0 mais n'a pas de dérivée seconde (en 0).

Exercice 15. -

Soit $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$ pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \setminus \{0\}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
2. Déterminer un DL de f en 0 à l'ordre 2.
3. Etudier la dérivabilité du prolongement de f .

Exercice 16. -

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x^3}{1+x^6}$. Calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 17. -

Déterminer les développements limités suivants :

1. $DL_3(0)$ de $f_1(x) = x^4 - x^2 + 1$.
2. $DL_3(2)$ de $f_1(x) = x^4 - x^2 + 1$.
3. $DL_3(1)$ de $f_2(x) = (\sqrt{x} - 1) \ln x$.

Exercice 18. -

Donner les développements limités en 0 des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \tan(x)$, à l'ordre 4.
2. $f_2(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sin x}$, à l'ordre 3.

Exercice 19. -

Donner le développement limité en 0 des fonctions :

1. $x \mapsto \exp(\sin(x))$ (à l'ordre 3).

2. $x \mapsto \sin(\tan(x))$ (à l'ordre 3).
3. $x \mapsto (\ln(1+x))^2$ (à l'ordre 3).
4. $x \mapsto \exp(\cos(x))$ (à l'ordre 4).
5. $x \mapsto \sin^6(x)$ (à l'ordre 9.)

Exercice 20. -

Déterminer les développements limités suivants :

1. $DL_2(1)$ de $f_1(x) = \cos(\ln x)$.
2. $DL_3(\frac{\pi}{4})$ de $f_2(x) = \ln(\tan x)$.
3. $DL_2(1)$ de $f_3(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{\ln x}$.

Exercice 21. -

Déterminer :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{1/x}$
3. $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{e}}{\ln x - 1}$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+3x)^{\frac{1}{3}} - 1 - \sin x}{1 - \cos x}$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} \right)$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \ln \left(\frac{\sin x}{x} \right) \right)$

Exercice 22. -

Etudier, au voisinage de 1, la fonction définie par $g(x) = x + 2\sqrt{x} - \sqrt{2+2x}$.

On demande de déterminer la tangente, la position de la courbe par rapport à cette tangente et l'allure de la courbe au voisinage de 1.

Exercice 23. -

On sait que la fonction définie par $f(x) = \arctan(x)$, réciproque de la fonction tangente, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est donnée par : $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

1. Donner un développement limité d'ordre 5 en 0 de f .
2. Montrer que $\forall x > 0, \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$.
3. En déduire un développement asymptotique d'ordre 3 de f au voisinage de $+\infty$.

Exercice 24. -

Rechercher si les courbes suivantes admettent une asymptote en $+\infty$ et déterminer la position s'il y a lieu :

1. $y = \sqrt{x^3(x+1)}$.
2. $y = \sqrt{x(x+1)}$.
3. $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$.
4. $y = (x^2 - 1) \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right)$.
5. $y = (x+1) \arctan(1 + 2/x)$.
6. $y = x \cdot \arctan x \cdot e^{1/x}$.
7. $y = e^{2/x} \sqrt{1+x^2} \arctan x$.
8. $y = \sqrt{x^2 - x} \exp \left(\frac{1}{x+1} \right)$.