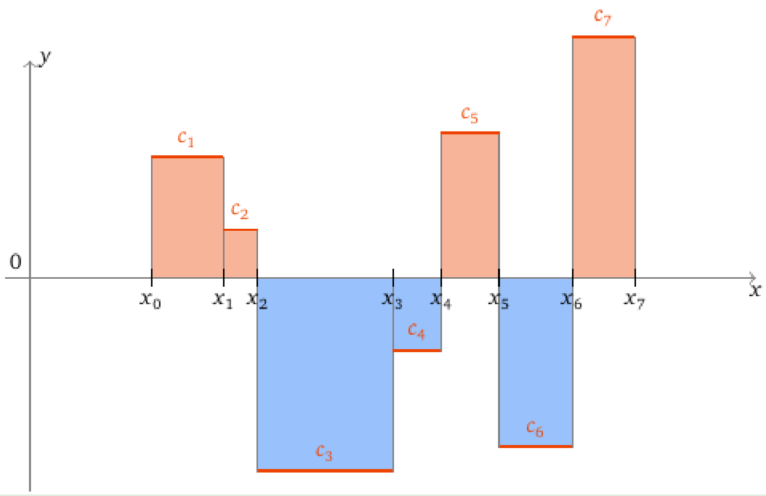
Chapitre 6 : Intégration sur un segment

I- Intégrale d'une fonction en escalier :

Définition.

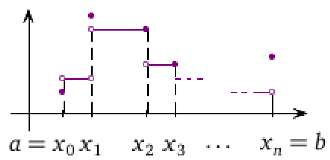
On appelle **subdivision** s d'un segment $[a, b]$ toute suite finie $s = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de nombres réels tels que :

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$



Définition **(Fonction en escalier, subdivision adaptée)**
On dit qu'une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ est *en escalier* si pour une certaine subdivision $(x_0, \ldots, x_n)$ de $[a, b]$, dite *adaptée à* f :

$$f \text{ est constante sur }]x_i, x_{i+1}[\text{ pour tout } i \in [\![0, n-1]\!].$$



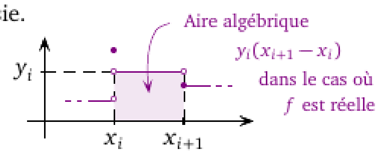
Théorème **(Propriétés élémentaires des fonctions en escalier)** Soient $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ et $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ en escalier.

- Lorsqu'on ajoute un nombre fini de points à une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f, le résultat est encore une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f.

  A fortiori, la réunion d'une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f et d'une subdivision de $[a, b]$ adaptée à g est une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f ET à g.
- Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\lambda f + \mu g$ est une fonction en escalier sur $[a, b]$, de même que $|f|$, $\mathrm{Re}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ et fg.

Définition-théorème **(Intégrale d'une fonction en escalier)** Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ en escalier. Soit en outre $(x_0, \ldots, x_n)$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f. Si pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, on note y_i la valeur de f sur $]x_i, x_{i+1}[$, alors le nombre complexe : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} y_i(x_{i+1} - x_i)$ ne dépend pas de la subdivision $(x_0, \ldots, x_n)$ choisie.

On l'appelle l'*intégrale de* f *sur* $[a, b]$, notée : $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ ou $\displaystyle\int_{[a,b]} f(t)\,dt$.



Théorème **(Propriétés de l'intégrale d'une fonction en escalier)** Soient $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ et $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ en escalier.

(i) **Linéarité :** Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$: $\displaystyle\int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g.$

(ii) **Inégalité triangulaire :** $\displaystyle\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|.$

(iii) **Relation de Chasles :** Pour tout $c \in [a,b]$: $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$

(iv) **Lien avec les parties réelle et imaginaire :** $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \mathrm{Re}(f) + \mathrm{i}\int_{[a,b]} \mathrm{Im}(f).$

Démonstration Donnons-nous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $c \in [a,b]$ et une subdivision $(x_0, \ldots, x_n)$ de $[a,b]$ adaptée à f ET à g — mais donc aussi à $\lambda f + \mu g$, $|f|$, $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

(i) $$\int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) = \sum_{i=0}^{n-1} \overbrace{(\lambda f + \mu g)\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)}^{\text{Valeurde } \lambda f + \mu g \text{ sur }]x_i, x_{i+1}[} (x_{i+1} - x_i)$$

$$= \lambda \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)}_{\text{Valeurde } f \text{ sur }]x_i, x_{i+1}[} (x_{i+1} - x_i) + \mu \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{g\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)}_{\text{Valeurde } g \text{ sur }]x_i, x_{i+1}[} (x_{i+1} - x_i) = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g.$$

(ii) D'après l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{C}$:

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| = \left|\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1} - x_i)\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \left|f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)\right| (x_{i+1} - x_i) = \int_{[a,b]} |f|.$$

(iii) Quitte à ajouter le point c à la subdivision $(x_0, \ldots, x_n)$, on peut supposer que : $x_k = c$ pour un certain $k \in [\![0, n]\!]$. La fonction $f_{|[a,c]}$ est alors en escalier sur $[a,c]$ de subdivision adaptée $(x_0, \ldots, x_k)$, et la fonction $f_{|[c,b]}$ l'est sur $[c,b]$ de subdivision adaptée $(x_k, \ldots, x_n)$. Enfin :

$$\int_{[a,b]} f = \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{k-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1} - x_i) + \sum_{i=k}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1} - x_i) = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]}$$

(iv) $$\int_{[a,b]} f = \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1} - x_i)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{Re}(f)\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1} - x_i) + \mathrm{i}\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{Im}(f)\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1} - x_i) = \int_{[a,b]} \mathrm{Re}(f) + \mathrm{i}\int_{[a,b]} \mathrm{Im}(f). \quad \blacksquare$$

II- Intégrale d'une fonction continue (par morceaux) :

Théorème 3

Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ en escaliers telle que $\forall x \in [a,b]$, $|f(x) - \theta(x)| \leq \epsilon$.

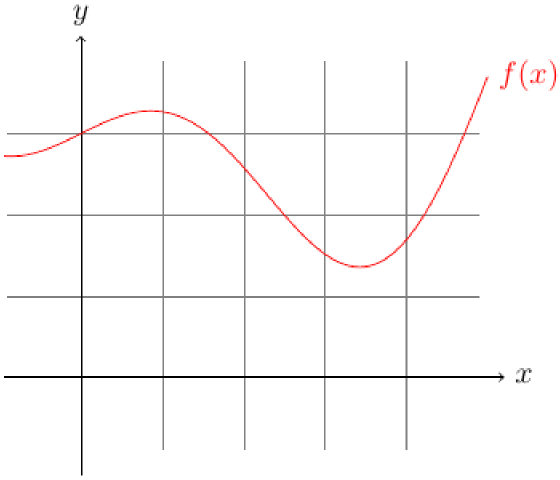
$\square$

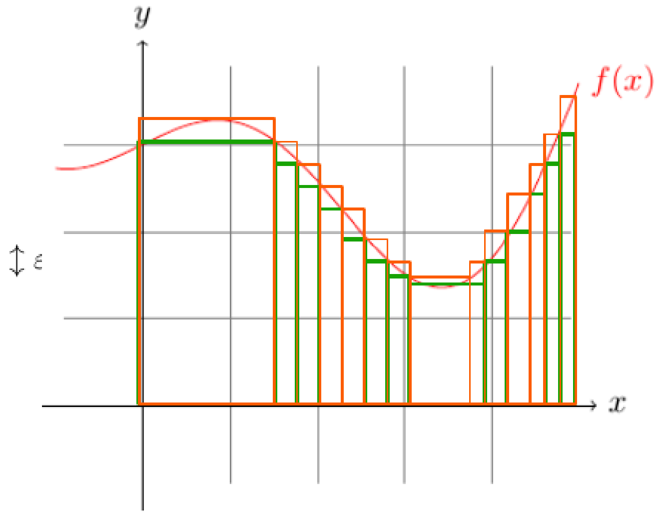
Propriété 4

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions $\varphi, \psi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ telles que :

$$\varphi \leq f \leq \psi \quad \text{et} \quad 0 \leq \psi - \varphi \leq \varepsilon.$$

Preuve. D'après le théorème précédent, on a θ en escaliers telle que $\forall x \in [a,b]$, $|f(x) - \theta(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}$. $\theta(x) - \frac{\epsilon}{2} \leq f(x) \leq \theta(x) + \frac{\epsilon}{2}$. On pose alors les fonctions en escalier $\varphi = \theta - \frac{\epsilon}{2}$ et $\psi = \theta + \frac{\epsilon}{2}$ pour obtenir le résultat.

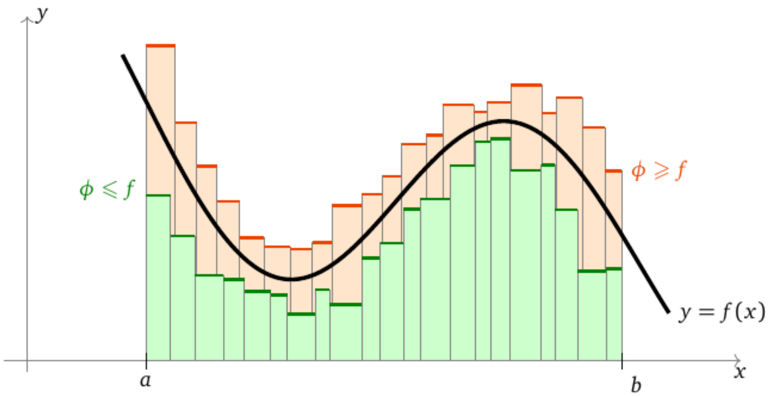




On suppose à présent que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée quelconque. On définit deux nombres réels :

$$I^-(f) = \sup\left\{\int_a^b \phi(x)\,dx \mid \phi \text{ en escalier et } \phi \leqslant f\right\}$$

$$I^+(f) = \inf\left\{\int_a^b \phi(x)\,dx \mid \phi \text{ en escalier et } \phi \geqslant f\right\}$$



Théorème 5

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors :

- $A^-_{[a,b]}(f) = \left\{\int_{[a,b]} \varphi \mid \varphi \in \mathcal{E}^-_{[a,b]}(f)\right\}$ admet une borne supérieure,
- $A^+_{[a,b]}(f) = \left\{\int_{[a,b]} \psi \mid \psi \in \mathcal{E}^+_{[a,b]}(f)\right\}$ admet une borne inférieure,

et ces deux bornes sont égales.

Preuve. La fonction f étant continue sur le segment $[a,b]$, elle est bornée sur $[a,b]$. posons $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$.

- $\mathcal{E}^-_{[a,b]}(f)$ est non vide puisqu'il contient la fonction constante m. Ainsi $I^-_{[a,b]}(f)$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$. De plus pour tout $\varphi \in \mathcal{E}^-_{[a,b]}(f)$, on a $\varphi \leq f \leq M$. Donc :

$$\int_{[a,b]} \varphi \leq \int_{[a,b]} M = M(b-a).$$

L'ensemble $A^-_{[a,b]}(f)$ est donc une partie non vide de $\mathbb{R}$ et majorée (par $M(b-a)$). Il possède donc une borne supérieure que l'on note α.

- De même, $A^+_{[a,b]}(f)$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et minorée par $m(b-a)$. Elle possède donc une borne inférieure que l'on note β.

- Puisque pour tout $(\varphi,\psi) \in \mathcal{E}^-_{[a,b]}(f) \times \mathcal{E}^+_{[a,b]}(f)$, $\varphi \leq \psi$, on a $\int_{[a,b]} \varphi \leq \int_{[a,b]} \psi$. Ainsi $\int_{[a,b]} \psi$ est un majorant de $A^-(f)$, sa borne supérieure α est donc plus petite que $\int_{[a,b]} \psi$. On obtient :

$$\forall \psi \in \mathcal{E}^+_{[a,b]}(f), \quad \alpha \leq \int_{[a,b]} \psi.$$

De même, α est un minorant de $A^+_{[a,b]}(f)$, et β est le plus grand des minorants de cette partie. Donc $\alpha \leq \beta$.

- Soit $\epsilon > 0$. On sait qu'il existe $\varphi \in \mathcal{E}^-_{[a,b]}(f)$ et $\psi \in \mathcal{E}^+_{[a,b]}(f)$ telles que pour tout $x \in [a,b]$, $\psi(x) - \varphi(x) \leq \epsilon$. On a alors :

$$\int_{[a,b]} \psi - \int_{[a,b]} \varphi \leq \epsilon(b-a).$$

Or par définition de α et β, on a :

$$\int_{[a,b]} \varphi \leq \alpha \leq \beta \leq \int_{[a,b]} \psi.$$

D'où pour tout $\varepsilon > 0$, $0 \leq \beta - \alpha \leq \int_{[a,b]} \psi - \int_{[a,b]} \varphi \leq \epsilon(b-a)$. Finalement, on a bien $\alpha = \beta$.

□

Définition.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle **intégrale de f sur $[a,b]$** le nombre réel noté $\int_{[a,b]} f$ défini par :

$$\int_{[a,b]} f = \sup\left\{ \int_{[a,b]} \varphi \mid \varphi \in \mathcal{E}^-_{[a,b]}(f) \right\} = \inf\left\{ \int_{[a,b]} \psi \mid \psi \in \mathcal{E}^+_{[a,b]}(f) \right\}$$

Propriété 6 (Linéarité)

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g$$

Lemme. Soit $\varepsilon > 0$. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et $\theta \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ telles que $|f - \theta| \leq \varepsilon$, alors

$$\left| \int_{[a,b]} f - \int_{[a,b]} \theta \right| \leq (b-a)\varepsilon$$

Preuve du Lemme. On a $\theta - \varepsilon \leq f \leq \theta + \varepsilon$, d'où (par définition de l'intégrale) :

$$\int_{[a,b]} (\theta - \varepsilon) \leq \int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} (\theta + \varepsilon).$$

Par linéarité de l'intégrale des fonctions en escalier :

$$\left| \int_{[a,b]} f - \int_{[a,b]} \theta \right| \leq (b-a)\varepsilon.$$

Preuve. Soient $\theta_1, \theta_2 \in \mathcal{E}([a,b], \mathbb{R})$ telles que :

$$|f - \theta_1| \leq \varepsilon \text{ et } |g - \theta_2| \leq \varepsilon.$$

Par le lemme :

$$(*) \quad \left| \int_{[a,b]} f - \int_{[a,b]} \theta_1 \right| \leq (b-a)\varepsilon \text{ et } \left| \int_{[a,b]} g - \int_{[a,b]} \theta_2 \right| \leq (b-a)\varepsilon.$$

Posons $h = \lambda f + \mu g$ et $\theta = \lambda\theta_1 + \mu\theta_2$. On a :

$$|h - \theta| \leq (|\lambda| + |\mu|)\varepsilon.$$

Par le lemme :

$$\left| \int_{[a,b]} h - \int_{[a,b]} \theta \right| \leq (b-a)(|\lambda| + |\mu|)\varepsilon.$$

Posons $I = \int_{[a,b]} \theta = \lambda \int_{[a,b]} \theta_1 + \mu \int_{[a,b]} \theta_2$ (par linéarité pour les fonctions en escalier). Grâce à $(*)$, on a :

$$\left| \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g - I \right| \leq (b-a)(|\lambda| + |\mu|)\varepsilon.$$

Finalement on obtient :

$$\begin{aligned}
\Delta &= \left| \int_{[a,b]} h - (\lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g) \right| \\
&= \left| \int_{[a,b]} h - I + (I - \lambda \int_{[a,b]} f - \mu \int_{[a,b]} g) \right| \\
&= \left| \int_{[a,b]} h - I \right| + \left| I - \lambda \int_{[a,b]} f - \mu \int_{[a,b]} g) \right| \\
&\leq 2(b-a)(|\lambda| + |\mu|)\varepsilon.
\end{aligned}$$

Comme c'est vrai quelque soit $\varepsilon > 0$, on en déduit $\Delta = 0$, et donc la linéarité de l'intégrale. $\square$

Propriété 7 (Relation de Chasles)

Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues et $c \in [a,b]$.

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$$

Preuve. Soit $\varphi \in \mathcal{E}^-_{[a,b]}(f)$. On a alors :

$$\varphi_{|[a,c]} \in \mathcal{E}^-_{[a,c]}(f) \text{ et } \varphi_{|[c,b]} \in A^-_{[c,b]}(f).$$

Par définition de l'intégrale, on obtient :

$$\int_{[a,b]} \varphi = \int_{[a,c]} \varphi + \int_{[c,b]} \varphi \leq \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$$

Ainsi $\displaystyle\int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$ est un majorant de $A^-_{[a,b]}(f)$. Par définition de la borne supérieure :

$$\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$$

En appliquant (linéarité) ce résultat à $-f$, on en déduit l'inégalité inverse, et donc :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$$

□

Notation. Soient a et b deux réels quelconques (en particulier on ne suppose plus nécessairement $a < b$). Soit f une fonction continue entre a et b. On définit le réel $\int_a^b f(x)dx$ par :

- si $a < b$, $\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)dx$;
- si $a = b$, $\int_a^b f(x)dx = 0$;
- si $b < a$, $\int_a^b f(x)dx = -\int_{[b,a]} f(x)dx$.

La relation de Chasles et la linéarité sont alors vraies pour a, b, c quelconques.

Propriété 8

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ continues sur un intervalle I et $a, b \in I$.

(1) $f \geq 0$ et $a \leq b \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0$;

(2) $f \leq g$ et $a \leq b \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$;

(3) $a \leq b \Rightarrow \left|\displaystyle\int_a^b f(x)dx\right| \leq \displaystyle\int_a^b |f(x)|dx$;

(4) Si $a \leq b$ et $m \leq f \leq M$ entre a et b, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

Preuve.

(1) Puisque $f \geq 0$, alors $\varphi = 0$ est une fonction en escalier sur $[a, b]$ telle que $\varphi \leq f$. Par définition de l'intégrale de f sur $[a, b]$, on en déduit que

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b \varphi(x)dx = 0.$$

(2) On applique le point précédent à la fonction $h = g - f \geq 0$:

$$\int_a^b h(x)dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx$$

par linéarité de l'intégrale.

(3) On a pour tout $x \in [a,b]$, $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$. D'où par croissance de l'intégrale :

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Ainsi, on obtient $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

(4) Il suffit de prendre l'intégrale dans les inégalités $m \leq f \leq M$.

$\square$

Remarque. La majoration suivante, vraie également si $b < a$, peut être utile :

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \left|\int_a^b |f(x)|dx\right|$$

Définition.

La valeur moyenne d'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue est :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f.$$

Remarque. La valeur moyenne est la constante μ qui vérifie $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \mu$.

Propriété 9

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et positive. Alors $\int_{[a,b]} f = 0$ si et seulement si f est nulle sur $[a,b]$.

Preuve.

$\Leftarrow$ Si f est nulle, son intégrale est nulle.

$\Rightarrow$ Par contraposition, supposons que f n'est pas nulle sur $[a,b]$: $\exists c \in [a,b]$ tel que $f(c) > 0$. D'après la définition de la continuité de f en c avec $\varepsilon = \frac{f(c)}{2}$:

$$\exists a \leq \alpha < \beta \leq b,\ \forall x \in [a,b],\ x \in [\alpha,\beta] \Rightarrow |f(x) - f(c)| \leq \varepsilon.$$

Ainsi pour tout $x \in [\alpha,\beta]$, on a $f(x) \leq \frac{f(c)}{2}$. En prenant l'intégrale, on en déduit donc que :

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_\alpha^\beta f(x)dx \geq \int_\alpha^\beta \varepsilon dx = (\beta - \alpha)\varepsilon > 0.$$

Remarque. Si f n'est pas supposée continue, le résultat est faux : par exemple $f(x) = 0$ sur $]0,1[$ et $f(0) = f(1) = 1$ est positive, non nulle mais $\int_0^1 f = 0$.

III – Calcul intégral :

5.1 Primitives

Définition.

Soient I un intervalle et $f : I \mapsto \mathbb{K}$ une fonction continue. On appelle **primitive** de f sur I toute fonction F de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et dont la dérivée est f.

Propriété 12 (Lien entre deux primitives d'une même fonction)

Deux primitives d'une même fonction sur un intervalle différent d'une constante.

Preuve. Si F_1 et F_2 sont deux primitives de la fonction F sur I, alors $(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f - f = 0$ donc la fonction $F_1 - F_2$ est constante sur I. $\square$

Propriété 13 (Théorème fondamental de l'analyse)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue, et $a \in I$.

(1) La fonction $F : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)dt \end{array}$ est l'unique primitive de f s'annulant en a.

(2) Pour toute primitive $F : I \to \mathbb{K}$ de f, on a

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Preuve.

(1) La fonction F est définie pour tout $x \in I$ car f est continue sur $[a, x]$ ou $[x, a]$ (selon que $x \geq a$ ou $x \leq a$). Soit $x_0 \in I$, montrons que F est dérivable en x_0 et que $F'(x_0) = f(x_0)$. On a pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) &= \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t)dt - f(x_0) \\ &= \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) - f(x_0)dt \end{aligned}$$

D'où avec l'inégalité de la moyenne (on vérifie que cette inégalité est aussi vraie si $x < x_0$) :

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)|dt$$

Or f est continue en x_0, donc :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall t \in I,\ |t - x_0| \leq \alpha \ \Rightarrow\ |f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Alors pour tout $x \in I$, $|x - x_0| \leq \alpha$, on a pour tout $t \in [x_0, x]$, $|f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ et en reportant :

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x \varepsilon dt \leq \varepsilon.$$

Ainsi on a montré que $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$. Donc F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$. Puisque c'est vrai pour tout $x_0 \in I$ et que f est continue, on en déduit finalement que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $F' = f$.

Reste à montrer que F est l'unique primitive de f qui s'annule en a. Si G satisfait aussi ces propriétés, alors on a vu qu'il existe $C \in \mathbb{K}$ tel que $F = G + C$. En évaluant en $x = a$, on obtient $C = 0$, et donc $F = G$.

(2) Soit $h : x \mapsto F(x) - F(a)$. Alors h est dérivable sur I comme combinaison linéaire de fonctions qui le sont, et pour $x \in I$, $h'(x) = F'(x) = f(x)$. De plus $h(a) = 0$, donc h est une primitive de f s'annulant en a. D'après l'unicité du point précédent, on a pour tout $x \in I$, $h(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$. D'où le résultat.

$\square$

Notations.

- Le symbole $\int f(x)\mathrm{d}x$ (introduit par Leibniz) désigne une primitive *quelconque* de f. Elle est donc définie à une constante additive près.
- La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est la primitive de f s'annulant en a.

5.2 Étude de $x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$

Propriété 14

Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $u, v : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $u(I), v(I) \subset J$ et $f : J \to \mathbb{K}$ continue. Alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ est définie sur I, de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et :

$$\forall x \in I,\ g'(x) = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x).$$

Preuve. Pour tout $x \in I$, on a $u(x), v(x) \in J$ et J est un intervalle. Donc $[u(x), v(x)] \subset J$ et $g(x)$ existe pour tout $x \in I$.
La fonction $f : J \to \mathbb{K}$ étant continue sur J, elle admet une primitive F de classe $\mathcal{C}^1$ sur J. On a alors pour tout $x \in I$,

$$g(x) = F(v(x)) - F(u(x)).$$

La fonction g est donc de classe $\mathcal{C}^1$ en tant que différence et composées de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, et pour tout $x \in I$, on a :

$$g'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)).$$

$\square$

5.3 Intégration par parties

Propriété 15 (Intégration par parties)

Soient f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ à valeur dans $\mathbb{K}$.

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = \Big[f(t)g(t)\Big]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt.$$

Preuve. On a

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt + \int_a^b f(t)g'(t)dt = \int_a^b (f'(t)g(t) + f(t)g'(t))dt = \int_a^b (fg)'(t)dt = \Big[f(t)g(t)\Big]_a^b$$

puisque fg est $\mathcal{C}^1$ comme produit de fonctions qui le sont. $\square$

Preuve. On a

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt + \int_a^b f(t)g'(t)dt = \int_a^b (f'(t)g(t) + f(t)g'(t))dt = \int_a^b (fg)'(t)dt = \Big[f(t)g(t)\Big]_a^b$$

puisque fg est $\mathcal{C}^1$ comme produit de fonctions qui le sont. $\square$

5.4 Changement de variables

Propriété 16 (Changement de variable)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur I. Soient $\varphi : [a,b] \to I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Alors

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{dx} = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{dt}.$$

On dit qu'on a effectué le changement de variables $x = \varphi(t)$.

Preuve. Si F est une primitive de f, alors $F \circ \varphi$ est une primitive de $f \circ \varphi \times \varphi'$ et on a :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{dx} = [F(x)]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$

$$\int_a^b f \circ \varphi(t)\varphi'(t)\mathrm{dt} = [F \circ \varphi(t)]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$

□

► *Dans la pratique, on veillera en effectuant un changement de variables à modifier les trois éléments :*

- *la variable* $x = \phi(t)$,
- *l'élément différentiel* $dx = \phi'(t)dt$,
- *les bornes de l'intégrale : si* t *varie entre* a *et* b, $x = \phi(t)$ *doit varier entre* $\phi(a)$ *et* $\phi(b)$.

Propriété 17

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ une fonction continue.

(1) si f est périodique de période T, alors pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_{a+T}^{b+T} f(t)\, dt\ ,\ \int_a^{a+T} f(t)\, dt = \int_b^{b+T} f(t)\, dt$$

(2) si f est une fonction paire, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$: $\int_{-a}^{a} f(t)\, dt = 2\int_0^a f(t)\, dt$.

(3) si f est une fonction impaire, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$: $\int_{-a}^{a} f(t)\, dt = 0$.

IV - Recherche de primitives :

Rappelons au cas où que nous savons primitiver aisément un certain nombre de fonctions classiques :

— les fonctions de la forme $x \longmapsto e^{ax}\cos(bx)$ ou $x \longmapsto e^{ax}\sin(bx)$ avec $a, b \in \mathbb{R}^*$ grâce à l'exponentielle complexe,

— les fonctions de la forme $x \longmapsto \sin^m x \cos^n x$ avec $m, n \in \mathbb{N}$ par linéarisation,

— les fonctions rationnelles par décomposition en éléments simples.

Les tableaux ci-dessous donnent enfin la liste des quelques primitives qu'il faut connaître à tout prix.

Fonction	Primitive
e^x	e^x
$\ln x$	$x\ln x - x$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$x^\alpha \quad (\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

Fonction	Primitive
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$

5.2. Intégration des éléments simples

Soit $\frac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle, où $P(x), Q(x)$ sont des polynômes à coefficients réels. Alors la fraction $\frac{P(x)}{Q(x)}$ s'écrit comme somme d'un polynôme $E(x) \in \mathbb{R}[x]$ (la partie entière) et d'éléments simples d'une des formes suivantes :

$$\frac{\gamma}{(x-x_0)^k} \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha x+\beta}{(ax^2+bx+c)^k} \text{ avec } b^2-4ac<0$$

où $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

1. On sait intégrer le polynôme $E(x)$.
2. Intégration de l'élément simple $\frac{\gamma}{(x-x_0)^k}$.
   (a) Si $k=1$ alors $\int \frac{\gamma\, dx}{x-x_0} = \gamma \ln|x-x_0| + c_0$ (sur $]-\infty, x_0[$ ou $]x_0, +\infty[$).
   (b) Si $k \geqslant 2$ alors $\int \frac{\gamma\, dx}{(x-x_0)^k} = \gamma \int (x-x_0)^{-k}\, dx = \frac{\gamma}{-k+1}(x-x_0)^{-k+1} + c_0$ (sur $]-\infty, x_0[$ ou $]x_0, +\infty[$).
3. Intégration de l'élément simple $\frac{\alpha x+\beta}{(ax^2+bx+c)^k}$. On écrit cette fraction sous la forme

$$\frac{\alpha x+\beta}{(ax^2+bx+c)^k} = \gamma \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^k} + \delta \frac{1}{(ax^2+bx+c)^k}$$

   (a) Si $k=1$, calcul de $\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\, dx = \int \frac{u'(x)}{u(x)}\, dx = \ln|u(x)| + c_0 = \ln|ax^2+bx+c| + c_0$.
   (b) Si $k \geqslant 2$, calcul de $\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^k}\, dx = \int \frac{u'(x)}{u(x)^k}\, dx = \frac{1}{-k+1} u(x)^{-k+1} + c_0 = \frac{1}{-k+1}(ax^2+bx+c)^{-k+1} + c_0$.
   (c) Si $k=1$, calcul de $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\, dx$. Par un changement de variable $u = px+q$ on se ramène à calculer une primitive du type $\int \frac{du}{u^2+1} = \arctan u + c_0$.
   (d) Si $k \geqslant 2$, calcul de $\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^k}\, dx$. On effectue le changement de variable $u = px+q$ pour se ramener au calcul de $I_k = \int \frac{du}{(u^2+1)^k}$. Une intégration par parties permet de passer de I_k à I_{k-1}.
   Par exemple calculons I_2. Partant de $I_1 = \int \frac{du}{u^2+1}$ on pose $f = \frac{1}{u^2+1}$ et $g' = 1$. La formule d'intégration par parties $\int f g' = [f g] - \int f' g$ donne (avec $f' = -\frac{2u}{(u^2+1)^2}$ et $g = u$)

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{du}{u^2+1} = \left[\frac{u}{u^2+1}\right] + \int \frac{2u^2\, du}{(u^2+1)^2} = \left[\frac{u}{u^2+1}\right] + 2\int \frac{u^2+1-1}{(u^2+1)^2} du \\ &= \left[\frac{u}{u^2+1}\right] + 2\int \frac{du}{u^2+1} - 2\int \frac{du}{(u^2+1)^2} = \left[\frac{u}{u^2+1}\right] + 2I_1 - 2I_2 \end{aligned}$$

   On en déduit $I_2 = \frac{1}{2} I_1 + \frac{1}{2}\frac{u}{u^2+1} + c_0$. Mais comme $I_1 = \arctan u$ alors

$$I_2 = \int \frac{du}{(u^2+1)^2} = \frac{1}{2}\arctan u + \frac{1}{2}\frac{u}{u^2+1} + c_0.$$

5.3. Intégration des fonctions trigonométriques

On peut aussi calculer les primitives de la forme $\int P(\cos x, \sin x)\, dx$ ou de la forme $\int \frac{P(\cos x, \sin x)}{Q(\cos x, \sin x)}\, dx$ quand P et Q sont des polynômes, en se ramenant à intégrer une fraction rationnelle.
Il existe deux méthodes :

- les règles de Bioche sont assez efficaces mais ne fonctionnent pas toujours ;
- le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$ fonctionne tout le temps mais conduit à davantage de calculs.

Les règles de Bioche. On note $\omega(x) = f(x)\,dx$. On a alors $\omega(-x) = f(-x)\,d(-x) = -f(-x)\,dx$ et $\omega(\pi - x) = f(\pi - x)\,d(\pi - x) = -f(\pi - x)\,dx$.

- Si $\omega(-x) = \omega(x)$ alors on effectue le changement de variable $u = \cos x$.
- Si $\omega(\pi - x) = \omega(x)$ alors on effectue le changement de variable $u = \sin x$.
- Si $\omega(\pi + x) = \omega(x)$ alors on effectue le changement de variable $u = \tan x$.

Exemple 15.
Calcul de la primitive $\int \frac{\cos x\,dx}{2-\cos^2 x}$
On note $\omega(x) = \frac{\cos x\,dx}{2-\cos^2 x}$. Comme $\omega(\pi - x) = \frac{\cos(\pi-x)\,d(\pi-x)}{2-\cos^2(\pi-x)} = \frac{(-\cos x)\,(-dx)}{2-\cos^2 x} = \omega(x)$ alors le changement de variable qui convient est $u = \sin x$ pour lequel $du = \cos x\,dx$. Ainsi :

$$\int \frac{\cos x\,dx}{2-\cos^2 x} = \int \frac{\cos x\,dx}{2-(1-\sin^2 x)} = \int \frac{du}{1+u^2} = \left[\,\arctan u\,\right] = \arctan(\sin x) + c\;.$$

Le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$.
Les formules de la « tangente de l'arc moitié » permettent d'exprimer sinus, cosinus et tangente en fonction de $\tan \frac{x}{2}$.

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Avec} \quad t = \tan\frac{x}{2} \quad \text{on a} \\[1em] \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \qquad \tan x = \dfrac{2t}{1-t^2} \\[1em] \text{et} \qquad dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2}. \end{array}}$$

Exemple 16.
Calcul de l'intégrale $\int_{-\pi/2}^{0} \frac{dx}{1-\sin x}$.
Le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$ définit une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ vers $[-1, 0]$ (pour $x = -\frac{\pi}{2}$, $t = -1$ et pour $x = 0$, $t = 0$). De plus on a $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ et $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$.

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{dx}{1-\sin x} &= \int_{-1}^{0} \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{1-\frac{2t}{1+t^2}} = 2\int_{-1}^{0} \frac{dt}{1+t^2-2t} \\ &= 2\int_{-1}^{0} \frac{dt}{(1-t)^2} = 2\left[\frac{1}{1-t}\right]_{-1}^{0} = 2\Big(1-\frac{1}{2}\Big) = 1 \end{aligned}$$

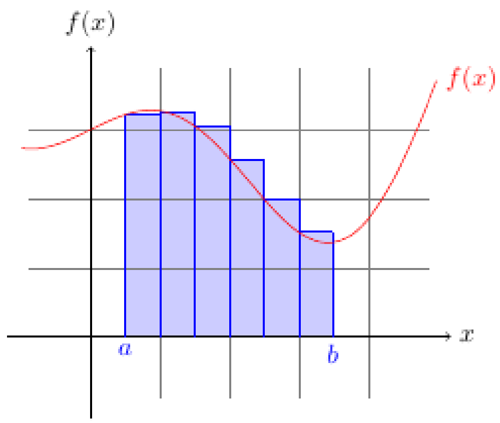
V – Approximation d'intégrales, sommes de Riemann :

Définition.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **somme de Riemann d'ordre n** associée à f la somme :

$$R_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\underbrace{a + k\frac{b-a}{n}}_{=a_k}\right).$$

Remarque. Cette somme de Riemann est l'intégrale de la fonction en escalier φ qui vaut $f(a_k)$ sur $]a_k, a_{k+1}[$ pour tout $0 \leq k \leq n-1$. Cela correspond à l'aire en bleu dans le dessin ci-dessous.



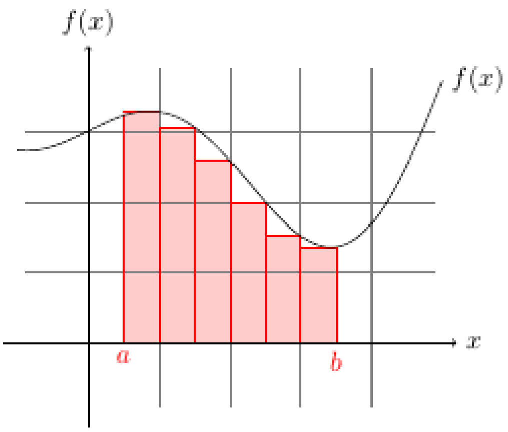
Preuve. On fait la preuve dans le cas où f est lipschitzienne (ce qui est en particulier le cas si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$). Notons K la constante de lipschitz associée à f sur $[a,b]$.

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)dx - R_n\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a_k\right)\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) - f\left(a_k\right)dx\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) - f\left(a_k\right)dx\right| \text{ par inégalité triangulaire} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} \left|f(x) - f\left(a_k\right)\right| dx \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} K|x-a_k|dx \text{ car } f \text{ est lipschitzienne} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} K(a_{k+1}-a_k)dx \text{ car } f \text{ est lipschitzienne} \\
&\leq K\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)^2 = K\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(b-a)^2}{n^2} = K\frac{(b-a)^2}{n}
\end{aligned}$$

Comme enfin $\lim K\dfrac{(b-a)^2}{n} = 0$, on obtient par théorème d'encadrement $\lim R_n = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$. □

Remarque :

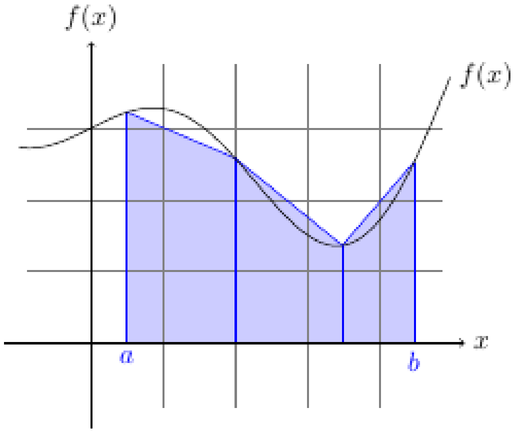
- On reconnait la méthode des rectangles. En particulier, ce résultat signifie qu'une somme de Riemann constitue une bonne approximation de l'intégrale pourvu que le pas soit petit.
- On a le même résultat avec $R'_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$.



Méthode des rectangles "à droite".

Remarque. Méthode des trapèzes. La vitesse de convergence de la somme de Riemann vers l'intégrale est en $\frac{1}{n}$. On peut améliorer la précision en utilisant la méthode des trapèzes. On approche alors $\int_{[a,b]} f$ par

$$T_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(a_k) + f(a_{k+1})}{2}$$



On obtient alors une approximation en $\frac{1}{n^2}$: Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$, on peut montrer que

$$\left| \int_a^b f(x)dx - T_n(f) \right| \leq M_2 \frac{(b-a)^3}{12n^2}$$

où $M_2 = \sup_{x \in [a,b]} |f''(x)|$.