Chapitre 5 : Analyse asymptotique

I- Relations de comparaison de suites :

I-1) Domination, négligeabilité :

Définition.

Soit (u_n) et (v_n) deux suites. On dit que :

- (u_n) est dominée par (v_n) si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée. On note alors $u_n = O(v_n)$.
- la suite (u_n) est négligeable devant (v_n) (ou que (v_n) est prépondérante devant la suite (u_n)) si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers 0. On note alors $u_n = o(v_n)$.

Exemples.

♦ On a : $\frac{\cos(n)+4}{n^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ car $(\cos(n)+4)$ est bornée.

♦ On a : $n^3\sin(n) = o\left(n^5\right)$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^3\sin(n)}{n^5} = \frac{\sin(n)}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Remarques.

- (u_n) est bornée si et seulement si $u_n = O(1)$.
- (u_n) converge vers 0 si et seulement si $u_n = o(1)$.
- $u_n = o(v_n) \implies u_n = O(v_n)$.

Propriété 1

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites.

(1) Si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$, alors $u_n = O(w_n)$ (transitivité de la relation O).

(2) Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$ (transitivité de la relation o).

Preuve. On démontre le premier point, le deuxième point est analogue. Soit (u_n) une suite telle que $u_n = o(w_n)$ et $w_n = o(t_n)$. Alors, pour tout $n \geq n_0$, on a : $\frac{u_n}{t_n} = \frac{u_n}{w_n} \cdot \frac{w_n}{t_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \cdot 0 = 0$. Ainsi, $u_n = o(t_n)$. □

Propriété 2

Soient (u_n), (v_n), (w_n) et (t_n) quatre suites telles que (w_n) et (t_n) ne s'annulent pas à partir d'un certain rang. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

(1) Si $u_n = O(w_n)$ et $v_n = O(w_n)$, alors $\lambda u_n + \mu v_n = O(w_n)$.
Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $\lambda u_n + \mu v_n = o(w_n)$.

(2) Si $u_n = O(w_n)$ et $v_n = O(t_n)$, alors $u_n v_n = O(w_n t_n)$.
Si $u_n = O(w_n)$ et $v_n = o(t_n)$, alors $u_n v_n = o(w_n t_n)$.

Exemples :

$n^2 \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(n^4)$. $\qquad 2^n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(3^n)$. $\qquad \frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Propriété 3 (croissances comparées)

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$ avec $\alpha, \beta > 0$, et $q > 1$. Alors :

$$q^{-n} = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \quad \frac{1}{n^\alpha} = o\left(\ln^\beta n\right), \quad \ln^\beta n = o\left(n^\alpha\right), \quad n^\alpha = o\left(q^n\right), \quad q^n = o(n!) \quad ; \quad n! = o(n^n)$$

Remarque. En notant $u_n \ll v_n$ au lieu de $u_n = o(v_n)$, on a donc lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\frac{1}{n!} \ll q^{-n} \ll \frac{1}{n^\alpha} \ll \ln^\beta n \ll n^\alpha \ll q^n \ll n! \ll n^n.$$

I-2) Equivalence :

Définition.

Soit (u_n) et (v_n) deux suites. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et on note $u_n \sim v_n$ si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers 1. On note alors $u_n \sim v_n$.

Exemple. On a $\sqrt{n} \sim \sqrt{n+1}$. En effet, $\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \sqrt{1+\dfrac{1}{n}}$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1$ et par composition par la fonction racine, continue en 1, on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \sqrt{1} = 1$.

Propriété 4

La relation $\sim$ est une relation, d'équivalence sur l'ensemble des suites ne s'annulant pas, c'est à dire :

(1) $\sim$ est réflexive : $u_n \sim u_n$;

(2) $\sim$ est symétrique : $u_n \sim v_n \to v_n \sim u_n$;

(3) $\sim$ est transitive : si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$, alors $u_n \sim w_n$.

Propriété 5

Soient (u_n), (v_n).

(1) $u_n \sim v_n \iff u_n - v_n = o(v_n)$.

(2) $u_n \sim v_n \implies u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$.

Preuve.

(1) $u_n \sim v_n \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n} = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_n}{v_n}-1\right) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_n - v_n}{v_n}\right) = 0 \Leftrightarrow u_n - v_n = o(v_n)$.

(2) Si $u_n \sim v_n$ alors $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geq n_0}$ converge vers 1 donc bornée. De plus, comme $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geq n_0}$ converge vers 1 alors $\dfrac{u_n}{v_n}$ donc u_n est non nulle à partir d'un certain rang et $\left(\dfrac{v_n}{u_n}\right)_{n\geq n_0}$ converge vers 1 donc $\left(\dfrac{v_n}{u_n}\right)_{n\geq n_0}$ est bornée.

□

Propriété 6

Soient (u_n), (v_n), (w_n) et (t_n) quatre suites telles que $u_n \sim w_n$ et $v_n \sim t_n$. Alors on a :

(1) $u_n v_n \sim w_n t_n$;

(2) $\frac{u_n}{v_n} \sim \frac{w_n}{t_n}$;

(3) $\forall p \in \mathbb{N}$, $u_n^p \sim w_n^p$.

Preuve. On a, pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_n w_n}{v_n z_n} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{w_n}{z_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ par produit de limites, d'où le premier point.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{\frac{u_n}{w_n}}{\frac{v_n}{z_n}} = \frac{u_n z_n}{v_n w_n} = \frac{u_n}{v_n} \times \left(\frac{w_n}{z_n}\right)^{-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

comme quotient de limites. Ainsi on a le second point.
Enfin, pour n et $p \in \mathbb{N}$, on a $\frac{u_n^p}{v_n^p} = \left(\frac{u_n}{v_n}\right)^p \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1^p = 1$ par opérations sur les limites. D'où le troisième point.
□

Exemple. Montrons que $\binom{n}{6} \sim \frac{n^6}{720}$.
En effet, pour tout $j \in \mathbb{N}$ fixé, on a $n - j \sim n$; par conséquent :

$$\binom{n}{6} = \frac{1}{6!}\prod_{j=0}^{5}(n-j) \sim \frac{1}{6!}\prod_{j=0}^{5} n = \frac{n^6}{720}$$

ATTENTION !!!!

- On ne peut ni ajouter, ni soustraire, les équivalents, comme le montre l'exemple suivant :

$$n+1 \sim n+2 \text{ et } -n \sim -n \text{ mais on n'a pas } 1 \sim 2.$$

- On ne compose pas les équivalents : si f est une fonction (même continue sur $\mathbb{R}$) et si $u_n \sim v_n$, on n'a pas forcément $f(u_n) \sim f(v_n)$ comme le montre l'exemple suivant :
si $u_n = n^2 + n$, $v_n = n^2$ et $f = \exp$, on a $u_n \sim v_n$, mais :

$$\frac{f(u_n)}{f(v_n)} = e^{n^2+n-n^2} = e^{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty, \text{ donc } f(u_n) \not\sim f(v_n).$$

- Lors d'une mise en puissance d'un équivalent, l'exposant doit être constant : on a $1 + \frac{1}{n} \sim 1$ mais $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \not\sim 1$ (puisque grâce à la limite classique $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$, on a $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \sim e$).

Propriété 7

Soit (u_n) une suite et $l \in \mathbb{R}^*$.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \iff u_n \sim l$$

Preuve. En effet, si $\lim_{n\to+\infty} u_n = l \neq 0$ alors (u_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang et on a : $\frac{u_n}{l} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{l}{l} = 1$. Donc $u_n \sim l$.
Réciproquement si $u_n \sim l$, alors puisque $l \neq 0$, $\frac{u_n}{l} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $u_n = \frac{u_n}{l} \cdot l \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$. □

Propriété 8

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \sim v_n$.

(1) u_n et v_n ont même signe strict (> 0 ou < 0) à partir d'un certain rang.

(2) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite (finie ou infinie) si et seulement si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite et alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Preuve.

(1) Comme (u_n) et (v_n) sont équivalentes, on a $\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Donc pour $\epsilon = \frac{1}{2} > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $\left|\frac{u_n}{v_n} - 1\right| \leq \frac{1}{2}$. En particulier pour tout $n \geq N$, on a $\frac{u_n}{v_n} \geq \frac{1}{2}$, et u_n et v_n ont même signe strict.

(2) Supposons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$. On a $u_n = \frac{u_n}{v_n} \times v_n$, donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ par opérations sur les limites.
De même si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite l, on a $v_n = \frac{v_n}{u_n} \times u_n$,$v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ par opérations sur les limites.

□

II- Relations de comparaison de fonctions :

Dans toute cette section :

- I désignera un intervalle réel non vide et non réduit à un point, a un point de I ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$), $\mathcal{D}$ désignera I ou $I \setminus \{a\}$;
- toutes les fonctions considérées seront définies sur $\mathcal{D}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et supposées non nulles sur $I \setminus \{a\}$ (de sorte que le quotient de deux fonctions est toujours bien défini sur $I \setminus \{a\}$) ;
- si les fonctions sont définies en a, on supposera de plus qu'elles sont continues en a.

II-1) Domination, négligeabilité :

Définition.

Soient f et $g : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$. On dit que :

- f est **dominée** par g au voisinage de a si $\dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a. On note alors $f(x) \underset{a}{=} O(g(x))$ ou $f \underset{a}{=} O(g)$.
- f est **négligeable** devant g au voisinage de a si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$. On note alors $f(x) \underset{a}{=} o(g(x))$ ou $f \underset{a}{=} o(g)$.

Exemples.

♦ $x^2 \sin\left(x^3\right) \underset{0}{=} O(x^2)$: en effet pour $I = \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^2 \sin\left(x^3\right)$ sont définies sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $\left|\dfrac{x^2 \sin\left(x^3\right)}{x^2}\right| = \left|\sin\left(x^3\right)\right| \leq 1$.

♦ Si $p < q$, $x^p \underset{+\infty}{=} o(x^q)$ et $x^q \underset{O}{=} o(x^p)$: en effet pour $I = \mathbb{R}$, $x \mapsto x^p$ et $x \mapsto x^q$ ne s'annulent pas sur $I \setminus \{0\}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^p}{x^q} = 0 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^q}{x^p}$.

Remarque. Pour $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, on a :

- f est bornée au voisinage de a si et seulement si $f \underset{a}{=} O(1)$.
- f converge vers 0 au voisinage de a si et seulement si $f \underset{a}{=} o(1)$.
- $f(x) \underset{a}{=} o(g(x)) \implies f(x) \underset{a}{=} O(g(x))$.

Propriété 9

Soit $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_*^+)^2$.

$$(\ln x)^\beta \underset{+\infty}{=} o(x^\alpha), \quad x^\beta \underset{+\infty}{=} o\left(e^{\alpha x}\right), \quad |\ln x|^\beta \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right), \quad e^{\alpha x} \underset{-\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$$

II-2) Equivalence :

Définition.

Soient f et $g : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$. On dit que f est **équivalente** à g au voisinage de a si $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. On note alors $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ ou $f \underset{a}{\sim} g$.

Exemple. $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$: en effet pour $I = \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ ne s'annule pas sur $I \setminus \{0\}$ et $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Remarque.

- Si f est continue en a, on a : $f(x) \underset{a}{\sim} f(a)$ si $f(a) \neq 0$.
- Si f est dérivable en a, on a : $f(x) - f(a) \underset{a}{\sim} f'(a)(x-a)$ si $f'(a) \neq 0$.

- Si $P(x) = a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \dots a_q x^q$ ($p \geq q$ est une fonction polynomiale, alors :

$$P(x) \underset{+\infty}{\sim} a_p x^p \quad \text{et} \quad P(x) \underset{0}{\sim} a_q x^q.$$

Propriété 10

Soient f et g définies sur $\mathcal{D}$.

- $f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \iff f(x) - g(x) \underset{a}{=} o(g(x))$.
- $f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \implies f(x) \underset{a}{=} O(g(x))$ et $g(x) \underset{a}{=} O(f(x))$.

Propriété 11

La relation $\underset{a}{\sim}$ est une relation d'équivalence, c'est à dire :

(1) $\underset{a}{\sim}$ est réflexive : $f \underset{a}{\sim} f$;

(2) $\underset{a}{\sim}$ est symétrique : $f \underset{a}{\sim} g \Rightarrow g \underset{a}{\sim} f$;

(3) $\underset{a}{\sim}$ est transitive : $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$ impliquent $f \underset{a}{\sim} h$.

Propriété 12 (Opérations sur les équivalents)

Soient f, g , h, u quatre fonctions définies sur $\mathcal{D}$. Si $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ et si $h(x) \underset{x \to a}{\sim} u(x)$, alors :

(1) $f(x)h(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)u(x)$;

(2) $\frac{f(x)}{h(x)} \underset{x \to a}{\sim} \frac{g(x)}{u(x)}$;

(3) $\forall p \in \mathbb{N}$, $f(x)^p \underset{x \to a}{\sim} g(x)^p$;

(4) Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, et si f^α et g^α sont bien définies sur $\mathcal{D}$, alors $f(x)^\alpha \underset{a}{\sim} g(x)^\alpha$.

Preuve.

(1) On a, pour $x \in \mathcal{D}$, $\frac{f(x)h(x)}{g(x)u(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \times \frac{h(x)}{u(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 1$ par produit de limites.

(2) Pour $x \in \mathcal{D}$, on a

$$\frac{\frac{f(x)}{h(x)}}{\frac{g(x)}{u(x)}} = \frac{f(x)u(x)}{g(x)h(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \times \left(\frac{h(x)}{u(x)}\right)^{-1} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 1$$

comme quotient de limites.

(3) Pour $x \in \mathcal{D}$ et $p \in \mathbb{N}$, on a $\frac{f(x)^p}{g(x)^p} = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^p \underset{x \to a}{\longrightarrow} 1^p = 1$ par opérations sur les limites.

(4) Pour tout $x \in \mathcal{D}$, $\dfrac{f^\alpha(x)}{g^\alpha(x)} = \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)^\alpha = e^{\alpha \ln\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}$. Comme $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 1$ donc $e^{\alpha \ln\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 1$.

$\square$

Propriété 13 (Équivalents classiques au voisinage de 0)

$$\begin{array}{rlr}
e^x - 1 \underset{0}{\sim} x & & \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x \\
\sin x \underset{0}{\sim} x & & \tan x \underset{0}{\sim} x \\
\arcsin x \underset{0}{\sim} x & & \arctan x \underset{0}{\sim} x \\
shx \underset{0}{\sim} x & & thx \underset{0}{\sim} x \\
(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x & \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}^* & \\
1 - \cos(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2} & & 1 - ch(x) \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}
\end{array}$$

Preuve. On utilise que si f est dérivable en a, $f(x) - f(a) \underset{a}{\sim} f'(a)(x-a)$ si $f'(a) \neq 0$. Les résultats s'en suivent, sauf les suivants (qu'on obtient par opérations sur les équivalents) :

$$1 - \cos x = \frac{1 - \cos^2(x)}{1 + \cos(x)} = \frac{\sin^2(x)}{1 + \cos(x)} \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

car $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$ et $1 + \cos(x) \underset{0}{\sim} 2$. De même, on a :

$$1 - ch(x) = \frac{1 - ch^2(x)}{1 + ch(x)} = -\frac{sh^2(x)}{1 + ch(x)} \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}.$$

$\square$

Propriété 14 (Composition à droite dans un équivalent)

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathcal{D}$. On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a et que $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$. Soit ϕ une fonction à valeurs dans $\mathcal{D}$ telle que $\lim_{t \to b} \phi(t) = a$ avec $b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. On a :

$$f \circ \phi(t) \underset{b}{\sim} g \circ \phi(t).$$

Preuve. En utilisant le théorème de composition pour les limites, on peut écrire :

$$\lim_{t \to b} \frac{f}{g}(\phi(t)) = \lim_{x \to a} \frac{f}{g}(x) = 1$$

D'où le résultat. □

IMPORTANT. On veillera à ne pas additionner, soustraire ou composer à gauche des équivalents sans justification, car les résultats obtenus sont généralement faux. Par exemple :

- $x+1 \underset{\pm\infty}{\sim} x+2$ et $-x \underset{\pm\infty}{\sim} -x$ mais $1 \underset{\pm\infty}{\sim} 2$;
- $x+1 \underset{\pm\infty}{\sim} x$, mais on n'a pas $\exp(x+1) \underset{\pm\infty}{\sim} \exp(x)$;
- $1+2x \underset{0}{\sim} 1+x$ et $\ln(1+2x) \underset{0}{\sim} 2x$, $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$.

Exemple. Puisque $\lim_{t \to 0} \sin t = 0$ et $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$, on en déduit : $\ln(1+\sin t) \underset{0}{\sim} \sin t \underset{0}{\sim} t$.
En revanche, on ne peut pas déduire directement de $\sin(t) \underset{0}{\sim} t$ et $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ que $\ln(1+\sin t) \underset{0}{\sim} \ln(1+t)$, car alors on compose à gauche les équivalents par $x \mapsto \ln(1+x)$.

Propriété 15

Soient $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions telle que $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$.

(1) Si g est de signe constant (>0 ou <0) au voisinage de a, alors f est de même signe strict que g au voisinage de a.

(2) Si g admet une limite finie ou infinie en a alors f admet une limite en a et $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$.

Preuve.

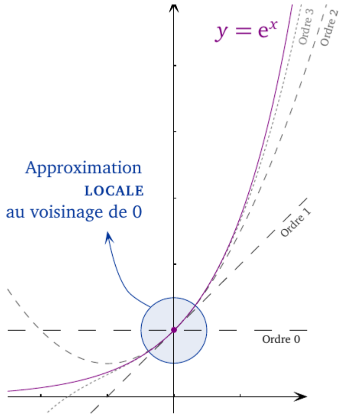
(1) On a $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 1$, donc par définition de la limite, en posant $\epsilon = \frac{1}{2} > 0$, il existe $r > 0$ tel que $\forall x \in [a-r, a+r] \cap \mathcal{D}$, $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right| \leq \frac{1}{2}$ et pour $x \in [a-r, a+r] \cap \mathcal{D}$, $\frac{f(x)}{f(x)} \geq \frac{1}{2}$, donc $f(x)$ et $g(x)$ ont même signe strict.

(2) Supposons que $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$. Pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a $f(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \times g(x)$, donc $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$ par opérations sur les limites.

□

III- Développements limités :

III-1) Généralités :



Nous cherchons dans ce paragraphe à approximer les fonctions par des fonctions polynomiales au voisinage d'un point, généralement 0. Nous allons par exemple montrer que : $e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$. Ce résultat signifie que la fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 3 la plus proche de l'exponentielle au voisinage de 0 est la fonction $x \longmapsto 1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}$.

Dans toute cette section :

- I désignera un intervalle réel non vide et non réduit à un point, a un réel appartenant à $\overline{I}$ $(= I \cup \{\text{extrémité de } I\})$, $\mathcal{D}$ désignera I ou $I \setminus \{a\}$;
- toutes les fonctions considérées seront définies sur $\mathcal{D}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition.

On dit que $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ admet un **développement limité** en a à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ (en abrégé $DL_n(a)$) s'il existe $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que

$$f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

Remarque. On distingue dans ce développement limité :

- sa **partie régulière**, qui est la fonction polynomiale :

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} p_k(x-a)^k.$$

- le reste $o((x-a)^n)$, fonction négligeable devant $(x-a)^n$ lorsque $x \to a$, qui s'écrit aussi $(x-a)^n \varepsilon_n(x-a)$ où $\varepsilon_n : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ est telle que $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Exemples.

♦ La fonction $f : \begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - x^2 + x^3 \ln(1+x) \end{array}$ admet un développement limité à l'ordre 3 en 0.
En effet, comme $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on a $x^3\ln(1+x) = o(x^3)$, ce qui permet d'écrire :

$$f(x) = x - x^2 + 2x^3 + o(x^3).$$

Propriété 16

Une fonction f admet, au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, un développement limité à l'ordre n si et seulement si la fonction $h \overset{g}{\mapsto} f(a+h)$ admet au voisinage de 0 un développement limité à l'ordre n. On a de plus :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + o((x-a)^n) \iff g(h) = f(a+h) \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + o(h^k)$$

Exemple. Calculons le $DL_3(2)$ de $f(x) = \frac{1}{x}$.

On pose $h = x - 2$. On a alors :

$$f(x) = f(2+h) = \frac{1}{2+h} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{h}{2}}$$

On utilise alors le DL en 0 de la fonction $x \to \frac{1}{1-x}$ calculé précédemment pour obtenir finalement :

$$f(2+h) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} - \frac{h^3}{8} + o(h^3)\right)$$

et donc :

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{(x-2)}{4} + \frac{(x-2)^2}{8} - \frac{(x-2)^3}{16} + o((x-2)^3).$$

Propriété 17 (Unicité d'un DL)

Si f admet un développement limité à l'ordre n en a, celui-ci est unique.

Preuve. Par l'absurde, supposons que $f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + o((x-a)^n) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k(x-a)^k + o((x-a)^n)$ avec $(a_0, ..., a_n) \neq (b_0, ..., b_n)$. Soit p le plus petit entier tel que $b_p \neq a_p$. Alors, pour tout $0 \leq k \leq p$, on a $a_k - b_k = 0$. On a $f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k = o((x-a)^n)$ et $f(x) - \sum_{k=0}^{n} b_k(x-a)^k = o((x-a)^n)$. Ainsi, pour tout $x \neq a$:

$$0 = f(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n}(a_k - b_k)(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

En divisant par $(x-a)^p$:

$$0 = (a_p - b_p) + (x-a)\sum_{k=p+1}^{n}(a_k - b_k)(x-a)^{k-a-1} + o((x-a)^{n-p}) \underset{x \to a}{\longrightarrow} a_p - b_p$$

D'où $a_p = b_p$, ce qui constitue une contradiction. $\square$

Propriété 18 (Troncature d'un DL)

Supposons que f admette un développement limité à l'ordre n en a,

$$f(x) \underset{x \to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

Alors pour tout $p \in [|0, n|]$, f admet un développement limité à l'ordre p en a obtenue en tronquant le développement limité à l'ordre p :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_p(x-a)^p + o((x-a)^p).$$

Preuve. Si f admet un développement limité à l'ordre n en a dont la partie régulière est $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k$, alors, pour tout $p \leq n$, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + o((x-a)^n) = \sum_{k=0}^{p} a_k(x-a)^k + \underbrace{\sum_{k=p+1}^{n} a_k(x-a)^k + o((x-a)^n)}_{o((x-a)^p)}$$

$\square$

Propriété 19

Si f est paire (resp. impaire) et admet un développement limité à l'ordre n en 0, ce développement limité ne contient que des termes pairs (resp. impairs).

Preuve. Supposons par exemple f paire, et notons

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$$

son développement limité en 0. On a alors

$$f(x) = f(-x) = a_0 + a_1(-x) + \cdots + a_n(-x)^n + o(x^n)$$

car une fonction négligeable devant $(-x)^n$ l'est aussi devant x^n. Par unicité du DL, $a_k = (-1)^k a_k$ pour tout $k \in [|0, n|]$. On a donc pour tout k impair, $a_k = -a_k$ donc $a_k = 0$. $\square$

Propriété 20

Supposons que f admette un développement limité à l'ordre n en a de partie régulière non nulle :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + ... + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

Alors en notant p le plus petit entier tel que $a_p \neq 0$, on a : $f(x) \underset{x \to a}{\sim} a_p(x-a)^p$

Preuve. Comme pour $k \in [|0, p-1|]$, $a_k = 0$, on a $f(x) = a_p(x-a)^p + \cdots + a_n(x-a)^n + o_a(x-a)^n$, puis

$$\frac{f(x)}{a_p(x-a)^p} = 1 + \frac{a_{p+1}}{a_p}(x-a) + \cdots + \frac{a_n}{a_p}(x-a)^{n-p} + o((x-a)^{n-p}) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 1.$$

$\square$

Remarque. f est donc du même signe strict que le premier terme non nul de son DL au voisinage de a.

III-2) Formule de Taylor-Young :

On commence par un lemme simple avant la version plus générale.

Théorème **(Lemme de primitivation des développements limités)** Soient I un intervalle, $g \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$, $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$. Si : $g'(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}\big((x-a)^n\big)$, alors : $g(x) \underset{x \to a}{=} g(a) + \mathrm{o}\big((x-a)^{n+1}\big)$.

« Constante de primitivation »

Démonstration Pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, g est continue sur $[a, x]$ (ou $[x, a]$) et dérivable sur $]a, x[$ (ou $]x, a[$), donc d'après le théorème des accroissements finis : $\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(c_x)$ pour un certain $c_x \in]a, x[$ (ou $]x, a[$). Ce procédé nous fournit une fonction $c : I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in I \setminus \{a\}$: $|c_x - a| < |x - a|$.

Par encadrement : $\lim\limits_{x \to a} c_x = a$, donc : $\left|\dfrac{g(x) - g(a)}{(x-a)^{n+1}}\right| = \left|\dfrac{g'(c_x)}{(x-a)^n}\right| = \underbrace{\left|\dfrac{g'(c_x)}{(c_x - a)^n}\right|}_{\underset{x \to a}{\longrightarrow} 0} \times \underbrace{\left|\dfrac{c_x - a}{x - a}\right|^n}_{\leqslant 1} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0.$ ■

Théorème (Primitivation des développements limités) Soient I un intervalle, $f \in \mathscr{D}(I,\mathbb{R})$ et $a \in I$. Si f' possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de a : $\quad f'(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + \mathrm{o}\big((x-a)^n\big) \quad$ avec $a_0,\ldots,a_n \in \mathbb{R}$, alors f possède un développement limité à l'ordre $n+1$ au voisinage de a : $\quad f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + \mathrm{o}\big((x-a)^{n+1}\big).$

« Constante de primitivation »

On peut donc TOUJOURS primitiver terme à terme le développement limité d'une dérivée !

Démonstration La fonction $x \overset{g}{\longmapsto} f(x) - f(a) - \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1}$ est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction $x \overset{g'}{\longmapsto} f'(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k$. Or ici : $\quad g'(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\big((x-a)^n\big), \quad$ donc : $\quad g(x) \underset{x\to a}{=} g(a) + \mathrm{o}\big((x-a)^{n+1}\big) \quad$ d'après le lemme, et c'est exactement le résultat voulu. ■

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad \ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + \mathrm{o}\big(x^n\big) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \mathrm{o}\big(x^n\big).$

Démonstration Puisque : $\quad \frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} x^k + \mathrm{o}\big(x^{n-1}\big), \quad$ alors : $\quad \frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + \mathrm{o}\big(x^{n-1}\big) \quad$ après composition par $x \longmapsto -x$. Primitivons : $\quad \ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + \mathrm{o}\big(x^n\big) \quad$ sachant que : $\quad \ln 1 = 0 \quad$ et que pour tout $k \in \mathbb{Z}$: $\quad (-1)^{k+1} = (-1)^{k-1}$.

Théorème (Formule de Taylor-Young) Soient I un intervalle, $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$ et $a \in I$. Alors f possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de a. Précisément : $\quad f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathrm{o}\big((x-a)^n\big).$

Ce résultat est avant tout un théorème d'EXISTENCE de développements limités. Sur cette question, nous disposons à présent de deux équivalences et d'une IMPLICATION (seulement) :

Continuité	$\Longleftrightarrow$	Existence d'un développement limité à l'ordre 0
Dérivabilité	$\Longleftrightarrow$	Existence d'un développement limité à l'ordre 1
Classe $\mathscr{C}^n$	$\Longrightarrow$	Existence d'un développement limité à l'ordre n

Démonstration Par récurrence — au rang n : $\quad \forall f \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R}), \quad f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathrm{o}\big((x-a)^n\big).$

Initialisation : Nous savons déjà que pour toute fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue : $\quad f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \mathrm{o}(1).$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la proposition vraie au rang n. Soit $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I,\mathbb{R})$. La fonction f' est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, donc par hypothèse de récurrence :

$$f'(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(f')^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathrm{o}\big((x-a)^n\big) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathrm{o}\big((x-a)^n\big).$$

Le théorème de primitivation des développements limités montre aussitôt le résultat souhaité :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}\,\frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + \mathrm{o}\big((x-a)^{n+1}\big) \underset{x\to a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} + \mathrm{o}\big((x-a)^{n+1}\big)$$
$$\underset{x\to a}{=} f(a) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathrm{o}\big((x-a)^{n+1}\big) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathrm{o}\big((x-a)^{n+1}\big).$$ ■

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad e^x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathrm{o}\big(x^n\big) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \mathrm{o}\big(x^n\big).$

III-3) Opérations sur les D.L. :

Remarque. On l'a dit, la formule de Taylor-Young est difficile à appliquer en pratique pour obtenir un DL, car elle impose de calculer les dérivées successives de la fonction. On présente dans cette section des résultats permettant d'obtenir des DL à partir de DL connus :

- par intégration de DL ;
- par opérations (combinaison linéaire, produits,...) sur les DL.

Combinaison linéaire, produit

Propriété 24

Supposons que f et g admettent des développements limités à l'ordre n en 0 :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} P_n(x) + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x\to 0}{=} Q_n(x) + o(x^n).$$

(1) Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda f + \mu g$ a un développement limité à l'ordre n en 0 :

$$(\lambda f + \mu g)(x) \underset{x\to 0}{=} (\lambda P_n + \mu Q_n)(x) + o(x^n).$$

(2) Le produit fg a un développement limité à l'ordre n en 0 :

$$(fg)(x) \underset{x\to 0}{=} T_n(PQ)(x) + o(x^n)$$

où $T_n(PQ)$ désigne la troncature à l'ordre n du polynôme PQ.

Preuve.

(1) On a :

$$(\lambda f + \mu g)(x) \underset{x\to 0}{=} (\lambda P_n + \mu Q_n)(x) + o(x^n).$$

C'est le $DL_n(0)$ de $\lambda f + \mu g$ car $\lambda P_n + \mu Q_n$ est une fonction polynomiale de degré $\leq n$.

(2) On a par produit des développements limités :

$$f(x)g(x) \underset{x\to 0}{=} (P_n(x) + o(x^n))\,(Q_n(x) + o(x^n)) = P_n(x)Q_n(x) + o(x^n)$$

car $P_n(x)o(x^n) + Q_n(x)o(x^n) + o(x^n)o(x^n)$ est négligeable devant x^n en 0.
On sait que $P_n(x)Q_n(x) = T_n(P_nQ_n)(x) + x^{n+1}R_n(x)$ où R_n est une fonction polynomiale. On en déduit que $P_n(x)Q_n(x) = T_n(P_nQ_n)(x) + o(x^n)$ et donc :

$$f(x)g(x) \underset{x\to 0}{=} T_n(P_nQ_n)(x) + o(x^n)$$

qui est le $DL_n(0)$ de fg car $T_n(P_nQ_n)$ est une fonction polynomiale de degré $\leq n$.

□

Exemple.

♦ Calculons le $DL_3(0)$ de $x \mapsto \cos x \sin x$:

$$\cos x \sin x = \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{2} + o(x^3) = x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3).$$

♦ Calculons le $DL_3(0)$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{1-x}$.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3) \quad \text{ et } \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

D'où par produit :

$$f(x) = \left(1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right),$$

ce qui donne, en développant et en simplifiant :

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + (x + x) + \left(\frac{x^2}{2} + x^2 + x^2\right) + o(x^3) \\ &= 1 + 2x + \frac{5}{2}x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

Composition

Propriété 25

Si $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{K}$ ont des développements limités en 0 à l'ordre n :

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \quad ; \quad g(x) = Q_n(x) + o(x^n),$$

si $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, alors la composée $g \circ f$ a un développement limité à l'ordre n en 0 :

$$g \circ f(x) = T_n(Q_n \circ P_n)(x) + o(x^n).$$

Preuve. Puisque $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, on peut factoriser dans le DL de f en 0 :

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) = x\left(P_{n-1}(x) + o(x^{n-1})\right).$$

On substitue dans $g \circ f(x) = \sum_{k=0}^{n} q_k (f(x))^k + (f(x))^n \varepsilon_g(f(x))$ le DL de f :

$$g \circ f(x) = \sum_{k=0}^{n} q_k (P_n(x) + o(x^n))^k + x^n (P_{n-1}(x) + o(x^{n-1}))^n \varepsilon_g(f(x)).$$

On regarde à présent chaque terme de cette expression :

- $(P_n(x) + o(x^n))^k$: en développant par la formule du binôme, on a un terme en $(P_n(x))^k$ et tous les autres termes contiennent $o(x^n)$ et sont négligeables devant x^n. Ainsi, on a :

$$(P_n(x) + o(x^n))^k = (P_n(x))^k + o(x^n).$$

- $x^n (P_{n-1}(x) + o(x^{n-1}))^n \varepsilon_g(f(x))$: on a $\lim\limits_{x \to 0} (P_{n-1}(x) + o(x^{n-1}))^n \varepsilon_g(f(x)) = 0$, donc :

$$x^n (P_{n-1}(x) + o(x^{n-1}))^n \varepsilon_g(f(x)) = o(x^n).$$

Finalement, on obtient que :

$$g \circ f(x) = \sum_{k=0}^{n} q_k (P_n(x))^k + o(x^n) = Q_n \circ P_n(x) + o(x^n).$$

Et comme $P_n(x)Q_n(x) = T_n(P_nQ_n)(x) + x^{n+1}R_n(x)$ où R_n est une fonction polynomiale, on en déduit que $P_n(x)Q_n(x) = T_n(P_nQ_n)(x) + o(x^n)$ et donc :

$$g \circ f(x) \underset{x \to 0}{=} T_n(Q_n \circ P_n)(x) + o(x^n).$$

C'est bien le $DL_n(0)$ de fg car $T_n(P_nQ_n)$ est une fonction polynomiale de degré $\leq n$. □

Exemple. Déterminons le $DL_4(0)$ de $x \mapsto f(x) = (1+x)^x$.

Pour tout $x \in I$, $f(x) = e^{x\ln(1+x)}$ avec $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(1+x) = 0$. On utilise la composition des DL.
Le développement limité à l'ordre 4 de $x \mapsto x\ln(1+x)$ s'écrit :

$$x\ln(1+x) \underset{0}{=} x\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) = \underbrace{x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} + o(x^4)}_{=u(x)}.$$

On a $u(x)^2 = x^4 + o(x^4)$, $u(x)^3 = o(x^4)$. Il suffit donc de faire le $DL_2(0)$ de l'exponentielle :

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$$

On obtient en substituant :

$$(1+x)^x \underset{0}{=} 1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3}\right) + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$$

Quotient de DL

Propriété 26

Soient $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$.
Si f et g ont des développements limités à l'ordre n en 0 et si g admet une limite finie non nulle en 0, alors f/g admet un développement limité à l'ordre n en 0.

Preuve. Puisque $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = l \neq 0$, il existe un intervalle J contenant 0 et inclus dans I sur lequel g ne s'annule pas sur $\mathcal{D} \cap J$, et la fonction f/g, définie sur $\mathcal{D} \cap J$.
Écrivons $g(x) = l(1 + u(x))$ (où $u(x) = \dfrac{g(x) - l}{l}$. On a alors :

Puisque $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 0$ et que u admet un $DL_n(0)$ (car c'est le cas pour g), on en déduit que $x \mapsto \dfrac{1}{1+u(x)}$ admet un $DL_n(0)$ par composition des $DL_n(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ et de $x \mapsto u(x)$. On obtient ainsi le $DL_n(0)$ de f/g en multipliant le $DL_n(0)$ ainsi obtenu avec celui de f. □

► *Pour faire le DL en 0 d'un quotient* $x \mapsto \dfrac{1}{g(x)}$ *avec* $\lim\limits_0 g \neq 0$*, on se ramènera toujours (comme dans la preuve précédente) à un développement limité d'une fonction de la forme :*

$$x \mapsto \frac{1}{1+u(x)} \quad \textit{avec} \quad u(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Exemples.

- Déterminons le $DL_5(0)$ de tan.

$\sin x$

Pour obtenir le $DL_3(0)$ de f, il faut donc le $DL_2(0)$ de h ce qui nécessite un $DL_2(0)$ du numérateur et du dénominateur de h. Cela nécessite donc un $DL_4(0)$ de $x \mapsto e^x - 1 - x$ (on a factorisé par x^2) et un $DL_3(0)$ de $x \mapsto \ln(1+x)$ (on a factorisé par x).

On a $u(x)^2 = \dfrac{x}{4} + o(x^5)$, $u(x)^3 = o(x^4)$. D'où en substituant :

$$\begin{aligned}
\tan x &\underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + o(x^5)\right) \\
&= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5)\right) \\
&= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} + \frac{5x^5}{24} + o(x^5) \\
&= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)
\end{aligned}$$

Remarque. Si g tend vers 0, il est encore possible que la fonction $\dfrac{f}{g}$ possède un développement limité : si f et g admettent des $DL_n(0)$ de formes normalisées :

$$f(x) = x^{n_1}\left(a_{p_1} + a_{p_1+1}x + ... + a_{n_1}x^{n_1-p_1} + o(x^{n_1-p_1})\right)$$
$$g(x) = x^{n_2}\left(b_{p_2} + b_{p_2+1}x + ... + b_{n_2}x^{n_2-p_2} + o(x^{n_2-p_2})\right)$$

avec $a_{p_1}, b_{p_2} \neq 0$, alors le quotient s'écrit :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = x^{p_1-p_2}\underbrace{\left(\frac{a_{p_1} + a_{p_1+1}x + ... + a_{n_1}x^{n_1-p_1} + o(x^{n_1-p_1})}{b_{p_2} + b_{p_2+1}x + ... + b_{n_2}x^{n_2-p_2} + o(x^{n_2-p_2})}\right)}_{=h(x)}$$

Comme $b_{p_2} \neq 0$, la proposition précédente, assure que la fonction h possède un développement limité. De plus, le terme constant du développement limité de la fonction h vaut $\dfrac{a_{p_1}}{b_{p_2}}$ donc est non nul. Par suite $\dfrac{f}{g}$ admet un développement limité si et seulement si $p_1 - p_2 \in \mathbb{N}$, c'est à dire $p_2 \leq p_1$, et son ordre est $\min(n_1 - p_1, n_2 - p_2)$.

Exemple. Déterminer, s'il existe, le $DL_3(0)$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{e^x - 1 - x}{\ln(1+x)}$.

- *Prédiction de l'ordre des DL à choisir (au brouillon) :*

$$f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{\ln(1+x)} = \frac{\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + ...}{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ...} = \frac{x^2\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24} + ...\right)}{x\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + ...\right)} = x \times \underbrace{\left[\frac{\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24} + ...}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + ...}\right]}_{=h(x)}$$

  Pour obtenir le $DL_3(0)$ de f, il faut donc le $DL_2(0)$ de h ce qui nécessite un $DL_2(0)$ du numérateur et du dénominateur de h. Cela nécessite donc un $DL_4(0)$ de $x \mapsto e^x - 1 - x$ (on a factorisé par x^2) et un $DL_3(0)$ de $x \mapsto \ln(1+x)$ (on a factorisé par x).

- *Rédaction :*

$$e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \quad \text{et} \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

  ou sous forme normalisée :

$$e^x - 1 - x = x^2\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24} + o(x^2)\right) \quad \text{et} \quad \ln(1+x) = x\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)$$

  On obtient l'écriture suivante :

$$f(x) = x \times \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24} + o(x^2)\right) \times \frac{1}{1 \underbrace{- \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)}_{=u(x)}}$$

  Comme on a :

$$u(x)^2 = \frac{x^2}{4} + o(x^2),$$

  on obtient :

$$\frac{1}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)} = \frac{1}{1 - u(x)} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^2)$$

Pour obtenir le développement limité de f cherché, il reste à calculer le produit :

$$\begin{aligned} f(x) &= x\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{6}+\frac{x^2}{24}+o(x^2)\right)\times\left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{12}+o(x^2)\right) \\ &= x\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{x}{4}+\frac{x}{6}\right)+\left(-\frac{x^2}{24}+\frac{x^2}{12}+\frac{x^2}{24}\right)+o(x^2)\right) \\ &= x\left(\frac{1}{2}+\frac{5x}{2}+\frac{x^2}{12}+o(x^2)\right) \\ &= \frac{x}{2}+\frac{5x^2}{2}+\frac{x^3}{12}+o(x^3) \end{aligned}$$

III-4) Applications des D.L. :

4.1 Recherche de limites et d'équivalents

Rappel. Supposons que f admette un développement limité à l'ordre n en a de partie régulière non nulle. On écrit sa forme normalisée :

$$f(x)=(x-a)^p(a_p+a_{p+1}(x-a)+\ldots+a_{n-p}(x-a)^{n-p}+o((x-a)^{n-p}).$$

Alors on a : $f(x)\underset{x\to a}{\sim} a_p(x-a)^p$

Exemple.

- Déterminons un équivalent au voisinage de 0 de $\dfrac{\sin(2x)-sh(2x)}{(2x-\sin x-\tan x)^2}$.

  Cherchons un équivalent du numérateur :

$$\sin(2x)=2x-\frac{4}{3}x^3+o(x^3) \quad \text{et} \quad sh(2x)=2x+\frac{4}{3}x^3+o(x^3)$$

  ce qui donne : $\sin(2x)-sh(2x)\sim-\dfrac{8}{3}x^3$.

  Cherchons un équivalent du dénominateur.

$$\begin{aligned} 2x-\sin x-\tan x &= 2x-\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)-\left(x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right) \\ &= -\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\sim-\frac{1}{6}x^3 \end{aligned}$$

  On en déduit par produit et quotient d'équivalents :

$$\frac{\sin(2x)-sh(2x)}{(2x-\sin x\tan x)^2}\sim\frac{-\frac{8}{3}x^3}{\left(-\frac{1}{6}x^3\right)^2}\sim-\frac{96}{x^3}$$

4.2 Étude locale d'une fonction

Rappel. Si f admet un $DL_1(a)$, f est dérivable en a et la courbe représentative de f admet une tangente en a.

► *Pour déterminer la position relative de la courbe représentative d'une fonction f par rapport à sa tangente, on cherche un équivalent de $x\mapsto f(x)-f(a)-(x-a)f'(a)$ en a en effectuant un DL de f :*

$$f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)\underset{a}{\sim}a_p(x-a)^p \quad \textit{avec} \quad a_p\in\mathbb{R}^* \ \textit{et}\ p\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}.$$

Alors $x\mapsto f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)$ est du signe de $a_p(x-a)^p$ au voisinage de a :

- *si p est pair, $f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)$ est de signe constant au voisinage de a. La courbe est au-dessus ou en-dessous de sa tangente en a (suivant le signe de a_p).*
- *si p est impair, $f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)$ change de signe en a. La courbe traverse sa tangente en a. On parle de **point d'inflexion**.*

Remarque. Dans le cas d'un point critique a, c'est à dire si $f'(a) = 0$, cette étude nous dit si on a un extremum local (si n pair) ou non (si n est impair).

Exemple. Soit $f : x \mapsto \frac{\cos x - 1}{x}$. f admet le $DL_3(0)$ suivant :

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{24}x^3 + o_0(x^3).$$

Ainsi f est dérivable en 0, et $f'(0) = -\frac{1}{2}$. Comme $f(x) + \frac{1}{2}x \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{24}x^3$, qui change de signe en 0, la courbe représentative de f traverse sa tangente en 0. Ainsi f admet un point d'inflexion en 0.

4.3 Application à l'étude d'asymptotes obliques

Définition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $\pm\infty$. On dit que f possède un $DL_n(\pm\infty)$ si la fonction $g : u \to f(1/u)$ possède un $DL_n(0)$.

Exemple. Calculons le $DL_2(\infty)$ de $f : x \mapsto \dfrac{x}{x-1}$.

On pose $u = \frac{1}{x}$. Alors $g(u) = \dfrac{1}{1-u} \underset{u \to 0}{=} 1 + u + u^2 + o(u^2)$ et on en déduit le $DL_2(\infty)$ de f :

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{=} 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^2}).$$

Définition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f admet une asymptote oblique en $\pm\infty$ s'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) - ax - b$ tende vers 0 en $\pm\infty$.

▶ *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$. On souhaite préciser son comportement en $+\infty$, en étudiant l'existence éventuelle d'une asymptote oblique et sa position relative par rapport à $\mathcal{C}_f$. Pour cela, on procèdera comme suit :*

- *On effectue un $DL_2(+\infty)$ de $\dfrac{f(x)}{x}$:*

$$\frac{f(x)}{x} \underset{x \to +\infty}{=} a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + o(1/x^2).$$

- *En multipliant par x, il vient $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} a_0 x + a_1 + \dfrac{a_2}{x} + o(1/x)$. La courbe admet alors la droite $y = a_0 x + a_1$ pour asymptote oblique en $+\infty$.*
- *La position de la courbe de f par rapport à l'asymptote oblique est donnée par le signe de $\dfrac{a_2}{x}$ (si $a_2 = 0$, on augmente l'ordre du DL jusqu'à trouver un coefficient non nul).*

Exemple. Soit $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$. Déterminons l'asymptote éventuelle de f en $+\infty$.

On pose $u = \frac{1}{x}$ et on étudie $\frac{f(x)}{x} = uf(u^{-1}) = \frac{1}{\sqrt{1-u}}$ (on recherche l'asymptote en $+\infty$, donc $0 < u < 1$). On effectue le $DL(0)$ de $u \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-u}}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-u}} = 1 + \frac{u}{2} + \frac{3u^2}{8} + o_0(u^2).$$

Donc on obtient $f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + o_{+\infty}(x^{-1})$. La droite $y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe et le graphe de f est au-dessus de l'asymptote au voisinage de $+\infty$ (car $f(x) - x - \frac{1}{2} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{3}{8x} > 0$).

Développements limités usuels

Les formules du tableau qui suit doivent être connues **par cœur** sans délai et sans la moindre hésitation.

Pour les fonctions paires, les développements limités sont donnés à l'ordre $2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, mais par exemple, puisque vous connaissez un développement limité de la fonction cosinus au voisinage de 0 aux ordres 0, 2, 4, 6..., bien sûr que vous en connaissez un à l'ordre 3, il suffit de tronquer au bon endroit : $\cos x \underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)$. Notez bien que ce développement est **plus fin** que le développement à l'ordre 2 : $\cos x \underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$. Sur le développement à l'ordre 3, on ne voit pas de terme d'ordre 3 mais ce n'est qu'une impression, **il y a un terme d'ordre 3**, avec un coefficient 0. À l'ordre 2, c'est différent, on ne voit pas de terme d'ordre 3 parce qu'un tel terme est réellement **invisible** à ce niveau de précision.

$\dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k + o\left(x^n\right) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o\left(x^n\right)$
$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o\left(x^n\right) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right)$
$e^x \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o\left(x^n\right) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right)$
$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + \ldots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o\left(x^n\right)$
$\sin x \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$
$\cos x \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n}\right) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n}\right)$
$\mathrm{Arctan}\, x \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o\left(x^{2n+1}\right) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o\left(x^{2n+1}\right)$
$\tan x \underset{x\to 0}{=} x + \dfrac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$