

# Chapitre 4 : Dérivabilité

## I- Nombre dérivé, fonction dérivée, opérations :

### I-1) Définitions :

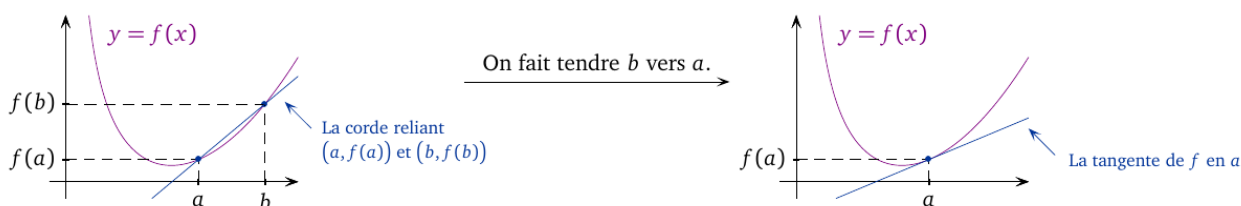
**Définition (Dérivabilité en un point ou sur une partie de  $\mathbb{R}$ )** Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction.

- Soit  $a \in D$ . On dit que  $f$  est *dérivable en  $a$*  si la limite :  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  EXISTE ET EST FINIE. Cette limite est alors appelée le *nombre dérivé de  $f$  en  $a$*  et notée  $f'(a)$ .
  - On dit que  $f$  est *dérivable sur  $D$*  si  $f$  est dérivable en tout point de  $D$ . La fonction  $x \mapsto f'(x)$  est alors appelée la *dérivée de  $f$* .
- On note  $\mathcal{D}(D, \mathbb{K})$  l'ensemble des fonctions dérivables sur  $D$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

Si on a choisi une fois pour toutes par convention de noter  $x$  la variable de  $f$ , le nombre dérivé de  $f$  en  $a$  peut être aussi noté  $\frac{df}{dx}(a)$  — même chose avec n'importe quel symbole autre que  $x$ .

**Définition (Tangente)** Soient  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $a \in D$ .

- Si  $f$  est dérivable en  $a$ , la droite d'équation :  $y = f(a) + f'(a)(x - a)$  est appelée la *tangente de  $f$  en  $a$* .
- Si :  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$ , la droite d'équation :  $x = a$  est appelée la *tangente de  $f$  en  $a$* .



**Théorème (La dérivabilité implique la continuité)** Soient  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $a \in D$ . Si  $f$  est dérivable en  $a$ , alors  $f$  est continue en  $a$ .

**✗ Attention !** La réciproque est totalement fautive, pensez à la fonction valeur absolue en 0. C'est contre-intuitif, mais il existe même des fonctions qui sont continues sur tout  $\mathbb{R}$  mais dérivables en aucun point.

**Démonstration** Puisque  $f$  est dérivable en  $a$ , alors :  $f(x) = \overbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}^{\xrightarrow{x \rightarrow a} f'(a)} \times \overbrace{(x - a)}^{\xrightarrow{x \rightarrow a} 0} + f(a) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$ , donc en effet  $f$  est continue en  $a$ . ■

**Définition (Dérivabilité à gauche/à droite en un point, demi-tangente)** Soient  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction et  $a \in D$  un point au voisinage duquel  $f$  est définie à gauche et à droite.

- On dit que  $f$  est *dérivable à gauche en  $a$*  si  $f|_{D \cap ]-\infty, a]}$  est dérivable en  $a$ , i.e. si la limite :  $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  existe et est finie. Cette limite est alors appelée le *nombre dérivé à gauche de  $f$  en  $a$*  et notée  $f'_g(a)$ .
- On dit que  $f$  est *dérivable à droite en  $a$*  si  $f|_{D \cap [a, +\infty[}$  est dérivable en  $a$ , i.e. si la limite :  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  existe et est finie. Cette limite est alors appelée le *nombre dérivé à droite de  $f$  en  $a$*  et notée  $f'_d(a)$ .

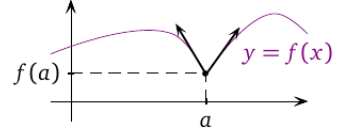
**Théorème (Caractérisation de la dérivabilité à l'aide des dérivabilités à gauche/à droite)** Soient  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction et  $a \in D$  un point au voisinage duquel  $f$  est définie à gauche et à droite.

$f$  est dérivable en  $a$  si et seulement si  $f$  est dérivable à gauche et à droite en  $a$  avec de plus :  $f'_g(a) = f'_d(a)$ .

Ci-contre,  $f$  est dérivable à gauche et à droite en  $a$ , mais pas en  $a$  car :  $f'_g(a) \neq f'_d(a)$ .

**Démonstration**

$$\begin{aligned}
 f \text{ est dérivable en } a &\iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existe et est finie} \\
 &\iff \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ et } \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existent, sont finies et égales} \\
 &\iff f \text{ est dérivable à gauche et à droite en } a \text{ et : } f'_g(a) = f'_d(a). \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$



**I-2) Opérations sur la dérivabilité :**

**Théorème (Opérations sur la dérivabilité)** Soient  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  et  $g : D \rightarrow \mathbb{C}$  deux fonctions et  $a \in D$ . On suppose  $f$  et  $g$  dérivables en  $a$ .

(i) **Combinaison linéaire** : Pour tous  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda f + \mu g$  est dérivable en  $a$  et :  $(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$ .

(ii) **Produit** :  $f g$  est dérivable en  $a$  et :  $(f g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ .

(iii) **Quotient** : Si :  $g(a) \neq 0$ ,  $\frac{f}{g}$  est dérivable en  $a$  et :  $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$ .

Soient  $f : D \rightarrow E$  et  $g : E \rightarrow \mathbb{C}$  deux fonctions et  $a \in D$ . On suppose  $f$  dérivable en  $a$  et  $g$  dérivable en  $f(a)$ .

(iv) **Composition** :  $g \circ f$  est dérivable en  $a$  et :  $(g \circ f)'(a) = f'(a) g'(f(a))$ .

**Démonstration** Pour les assertions (ii) et (iii), remarquons que :  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$  car la dérivabilité de  $g$  en  $a$  implique sa continuité, et de même :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  pour l'assertion (iv).

(i) La fonction  $\lambda f + \mu g$  est dérivable en  $a$  avec :  $(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$  car :

$$\frac{(\lambda f + \mu g)(x) - (\lambda f + \mu g)(a)}{x - a} = \lambda \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \mu \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda f'(a) + \mu g'(a).$$

(ii) La fonction  $f g$  est dérivable en  $a$  avec :  $(f g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$  car par produit :

$$\frac{(f g)(x) - (f g)(a)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} g(x) + f(a) \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

(iii) Supposons :  $g(a) \neq 0$ . La fonction  $\frac{1}{g}$  est alors dérivable en  $a$  avec :  $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}$  car :

$$\frac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(a)}{x - a} = -\frac{1}{g(x)g(a)} \times \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} -\frac{g'(a)}{g(a)^2}.$$

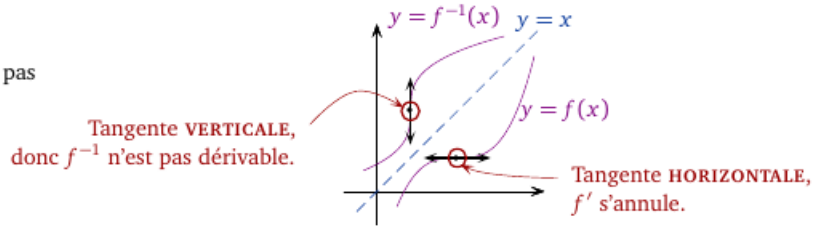
(iv) Pour tout  $y \in E$ , posons :  $\tau(y) = \begin{cases} \frac{g(y) - g(f(a))}{y - f(a)} & \text{si : } y \neq f(a) \\ g'(f(a)) & \text{si : } y = f(a). \end{cases}$  Par dérivabilité de  $g$  en  $f(a)$  :

$$\begin{aligned}
 \lim_{y \rightarrow f(a)} \tau(y) &= g'(f(a)), \text{ et pour tout } x \in E : \tau(f(x))(f(x) - f(a)) = g \circ f(x) - g \circ f(a) \text{ — } y \text{ compris} \\
 \text{pour } x = a \text{ — donc : } &\frac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tau(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a} f'(a) g'(f(a)). \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

**Théorème (Dérivabilité d'une réciproque)** Soient  $I$  un intervalle et  $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$  bijective de  $I$  sur  $J = f(I)$ .  
 Si  $f'$  NE S'ANNULE PAS SUR  $I$ , alors  $f^{-1}$  est dérivable sur  $J$  et :  $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$ .

**✘ Attention !**

L'hypothèse selon laquelle  $f'$  ne s'annule pas est essentielle !



**Démonstration** Soit  $b \in J$ .

- Comme  $f$  est continue et bijective,  $f^{-1}$  est continue en  $b$  :  $\lim_{y \rightarrow b} f^{-1}(y) = f^{-1}(b)$  ♣.
- Or  $f$  est dérivable en  $f^{-1}(b)$  :  $\lim_{x \rightarrow f^{-1}(b)} \frac{f(x) - f(f^{-1}(b))}{x - f^{-1}(b)} = f'(f^{-1}(b))$ , donc après passage à l'inverse  
 — par hypothèse  $f'$  ne s'annule pas :  $\lim_{x \rightarrow f^{-1}(b)} \frac{x - f^{-1}(b)}{f(x) - f(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$  ♠.
- Composons enfin ♣ et ♠ :  $\lim_{y \rightarrow b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$ . ■

### I-3) Dérivées usuelles :

Le tableau de gauche est un résumé des principales formules à connaître,  $x$  est une variable. Le tableau de droite est celui des compositions (voir paragraphe suivant),  $u$  représente une fonction  $x \mapsto u(x)$ .

Fonction	Dérivée
$x^n$	$nx^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}$
$x^\alpha$	$\alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
$e^x$	$e^x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Fonction	Dérivée
$u^n$	$nu'u^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2} \frac{u'}{\sqrt{u}}$
$u^\alpha$	$au'u^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
$e^u$	$u'e^u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\cos u$	$-u' \sin u$
$\sin u$	$u' \cos u$
$\tan u$	$u'(1 + \tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$

## II- Dérivées successives, fonctions de classe $C^n$ :

**Définition (Dérivées successives)** Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction.

On commence par poser :  $f^{(0)} = f$ . Ensuite, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , si on a réussi à définir  $f^{(k)}$  sur  $D$  au cours des étapes précédentes, et si  $f^{(k)}$  est dérivable sur  $D$ , on pose :  $f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$ .

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , si la fonction  $f^{(k)}$  est bien définie, dite *dérivée  $k^{\text{ème}}$  de  $f$* , on dit que  $f$  est  $k$  fois dérivable sur  $D$ . On note généralement  $f, f', f''$  et  $f'''$  plutôt que  $f^{(0)}, f^{(1)}, f^{(2)}$  et  $f^{(3)}$  respectivement.

Si on a choisi une fois pour toutes par convention de noter  $x$  la variable de  $f$ , la dérivée  $k^{\text{ème}}$  de  $f$  peut être aussi notée  $\frac{d^k f}{dx^k}$  — même chose avec n'importe quel symbole autre que  $x$ .

**Définition (Fonction de classe  $\mathcal{C}^k$ )** Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction.

- Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $D$  si  $f$  est  $k$  fois dérivable sur  $D$  et si  $f^{(k)}$  est continue sur  $D$ .  
On note  $\mathcal{C}^k(D, \mathbb{K})$  l'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $D$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .
- On dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $D$  si  $f$  est dérivable autant de fois qu'on le veut sur  $D$ .  
On note  $\mathcal{C}^\infty(D, \mathbb{K})$  l'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $D$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

**✗ Attention !** Être de classe  $\mathcal{C}^1$ , ce n'est pas être « dérivable et continue » — puisqu'on est toujours continu quand on est dérivable — mais être « dérivable à dérivée continue ».

Sur la figure ci-dessous, chaque flèche décrit une implication.



### Propriété 7

Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(f, g) \in (\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}))^2$  et  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ . Alors  $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$  et  $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$ .

**Preuve.** On montre par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$  la propriété  $\mathcal{P}(n)$  : Si  $f$  et  $g$  sont  $\mathcal{C}^n$ , alors  $\lambda f + \mu g$  est  $\mathcal{C}^n$  et  $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$ .

Pour  $n = 0$ , on a vu dans le chapitre précédent que  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie. Supposons  $f$  et  $g$  de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$ . Alors  $f$  et  $g$  sont  $\mathcal{C}^n$ , donc par hypothèse de récurrence,  $\lambda f + \mu g$  est  $\mathcal{C}^n$  et  $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$ . Comme  $f^{(n)}$  et  $g^{(n)}$  sont  $\mathcal{C}^1$  (car  $f$  et  $g$   $\mathcal{C}^{n+1}$ ),  $(\lambda f + \mu g)^{(n)}$  est dérivable (comme combinaison linéaire de fonctions qui le sont) de dérivée  $(\lambda f + \mu g)^{(n+1)} = \lambda f^{(n+1)} + \mu g^{(n+1)}$  continue. Ainsi  $\lambda f + \mu g$  est  $\mathcal{C}^{n+1}$  et on a  $\mathcal{P}(n+1)$ .

Conclusion :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}(n)$  est vraie. □

## Formule de Leibniz :

### Propriété 8 (Formule de Leibniz)

Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$ . Alors  $fg$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$  et on a :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

**Preuve.** On montre par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$  la propriété  $\mathcal{P}(n)$  : Si  $f$  et  $g$  sont  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$ , alors  $fg$  est  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$  et  $(fg)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ .

Si  $f$  et  $g$  sont continues sur  $I$ , alors  $fg$  est continue sur  $I$  et  $\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} f^{(k)} g^{(0-k)} = \binom{0}{0} f^{(0)} g^{(0)} = fg = (fg)^{(0)}$ , donc on a  $\mathcal{P}(0)$ .

(ii) Au rang  $k$  : «  $\forall f, g \in \mathcal{C}^k(D, \mathbb{C}), fg \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{C})$  et  $(fg)^{(k)} = \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} f^{(p)} g^{(k-p)}$  ».

**Hérédité :** On suppose le résultat vrai au rang  $k$ . Soient  $f, g \in \mathcal{C}^{k+1}(D, \mathbb{C})$ . Aussitôt :  $f, g \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{C})$ , donc :  $fg \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{C})$  et :  $(fg)' = f'g + fg'$ . Or :  $f'g, fg' \in \mathcal{C}^k(D, \mathbb{C})$  par hypothèse de récurrence, donc :  $(fg)' \in \mathcal{C}^k(D, \mathbb{C})$ , i.e. :  $fg \in \mathcal{C}^{k+1}(D, \mathbb{C})$ . Ensuite :

$$\begin{aligned} (fg)^{(k+1)} &= ((fg)')^{(k)} = (f'g + fg')^{(k)} \stackrel{\text{HDR}}{=} \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} (f')^{(p)} g^{(k-p)} + \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} f^{(p)} (g')^{(k-p)} = \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} f^{(p+1)} g^{(k-p)} + \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} f^{(p)} g^{(k-p+1)} \\ &= \sum_{p=1}^{k+1} \binom{k}{p-1} f^{(p)} g^{(k-p+1)} + \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} f^{(p)} g^{(k-p+1)} \stackrel{\text{Formule de Pascal}}{=} \underbrace{f g^{(k+1)}}_{p=0} + \sum_{p=1}^k \binom{k+1}{p} f^{(p)} g^{(k+1-p)} + \underbrace{f^{(k+1)} g}_{p=k+1} = \sum_{p=0}^{k+1} \binom{k+1}{p} f^{(p)} g^{(k+1-p)}. \end{aligned}$$

### Propriété 9

Soient  $f$  et  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^n$ . Si  $g$  ne s'annule pas, alors  $\frac{f}{g}$  est  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$ .

### Propriété 10

Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$  telles que  $f(I) \subset J$ . Alors  $(g \circ f)$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$ .

### Propriété 11

Soit  $f : I \rightarrow J$  bijective, de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$  et telle que  $f'$  ne s'annule pas. Alors  $f^{-1}$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $J$ .

### III- Propriétés des fonctions dérivables :

#### III-1) Extremum local :

##### Définition.

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction.

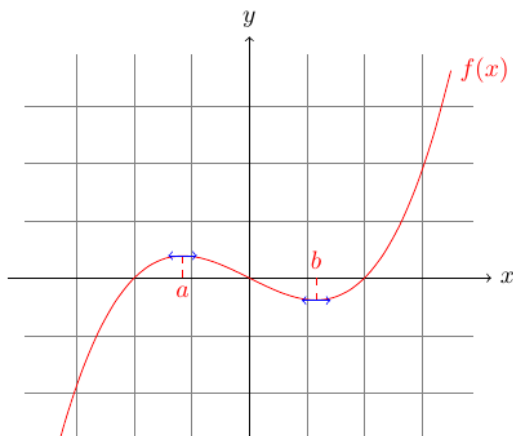
- On dit que  $f$  admet un maximum local en  $a$ , s'il existe un réel  $\eta > 0$  tel que la fonction  $f|_{I \cap [a-\eta, a+\eta]}$  admette un maximum en  $a$ , i.e :

$$\forall x \in I \cap [a - \eta, a + \eta], f(x) \leq f(a)$$

- On dit que  $f$  admet un minimum local en  $a$ , s'il existe un réel  $\eta > 0$  (eta) tel que la fonction  $f|_{I \cap [a-\eta, a+\eta]}$  admette un minimum en  $a$ , i.e :

$$\forall x \in I \cap [a - \eta, a + \eta], f(a) \leq f(x)$$

- On dit que  $f$  admet un extremum local en  $a$ , si  $f$  admet un maximum ou un minimum local en  $a$ .



$f$  admet ici des extrema locaux (et non globaux) en  $a$  et  $b$ .

##### Propriété 12 (Condition nécessaire d'extrémum)

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable. Si  $f$  admet un extremum local en un point  $a$  intérieure à  $I$  (i.e.  $a \in I$  et  $a$  n'est pas une extrémité de  $I$ ), alors  $f'(a) = 0$ .

**Preuve.** Quitte à changer  $f$  en  $-f$ , on suppose que  $f$  admet en  $a$  un maximum local. Il existe alors  $\eta > 0$  tel que  $\forall x \in [a - \eta, a + \eta] \cap I, f(x) \leq f(a)$ . Comme  $a$  n'est pas une extrémité de  $I$ , il existe  $\nu > 0$  tel que  $[a - \nu, a + \nu] \subset I$ . Posons  $\delta = \min(\eta, \nu) > 0$ . Ainsi, pour tout  $x \in [a - \delta, a + \delta]$ ,  $f(x) \leq f(a)$ .

Pour tout  $x \in [a - \delta, a[$ ,  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$  (car  $f(x) - f(a) \leq 0$  et  $x - a < 0$ ), donc en passant à la limite quand  $x \rightarrow a^-$  (comme  $f$  est dérivable en  $a$ ),  $f'(a) = f'_g(a) \geq 0$ .

De même, pour tout  $x \in ]a, a + \delta]$ ,  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$  (car  $f(x) - f(a) \leq 0$  et  $x - a > 0$ ), donc en passant à la limite quand  $x \rightarrow a^+$ ,  $f'(a) = f'_d(a) \leq 0$ .

Ainsi,  $f'(a) = 0$ . □

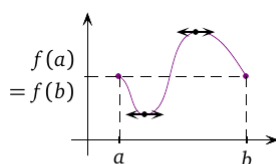
### Remarques.

- La condition  $f'(a) = 0$  n'implique pas qu'il y ait un extremum local en  $a$ .  
Par exemple, la fonction  $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3$  satisfait  $f'(0) = 0$ , mais  $f$  n'admet pas d'extremum local en 0.
  - L'hypothèse  $a$  intérieur à  $I$  est essentielle : par exemple, la fonction  $f : x \in [0, 1] \mapsto [0, 1]$  est dérivable sur  $]0, 1[$  et a son minimum en 0 et son maximum en 1, mais  $f'(0) = f'(1) = 1 \neq 0$ .
- Pour déterminer les extrema d'une fonction  $f$ , on procèdera comme suit :
- on étudie les extrema en les points intérieurs à  $I$  : on résout l'équation  $f'(x) = 0$ , puis on vérifie si les points obtenus correspondent ou non à des extrema locaux (avec le tableau de variations de  $f$  par exemple).
  - on étudie si les extrémités de  $I$  (si elles appartiennent à  $I$ ) correspondent ou non à des extrema locaux de  $f$ .

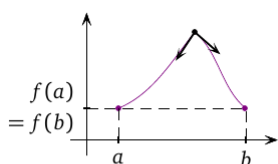
## III-2) Théorème de Rolle :

**Théorème (Théorème de Rolle)** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$  pour laquelle :  $f(a) = f(b)$ . Il existe un réel  $c \in ]a, b[$  pour lequel :  $f'(c) = 0$ .

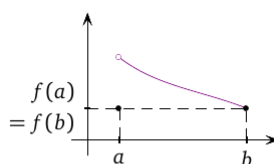
Chaque hypothèse du théorème a son importance.



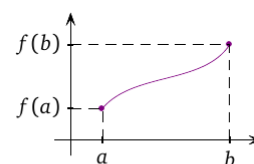
Situation standard du théorème de Rolle.



Si on enlève la dérivabilité même en un point, rien ne va plus.



Si on enlève la continuité, même sur les bords, c'est encore pire.



Si :  $f(a) \neq f(b)$ , c'est toujours la cata.

**Démonstration** Continue sur le SEGMENT  $[a, b]$ ,  $f$  y est bornée et possède un minimum  $m$  et un maximum  $M$  d'après le théorème des bornes atteintes.

- Si :  $f(a) = f(b) \neq M$ , alors comme  $f$  atteint ses bornes :  $f(c) = M$  pour un certain  $c \in ]a, b[$ . Par hypothèse,  $c$  n'est alors pas une borne de  $[a, b]$ , donc :  $f'(c) = 0$  d'après le théorème précédent.
- Si :  $f(a) = f(b) \neq m$ , même raisonnement.
- Dernier cas enfin :  $f(a) = f(b) = m = M$ . Dans ce cas,  $f$  est constante de valeur  $M = m$  sur tout  $[a, b]$  par définition de  $m$  et  $M$ , donc  $f'$  est nulle sur tout  $[a, b]$  ! ■

**Théorème (Théorème des accroissements finis)** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ .

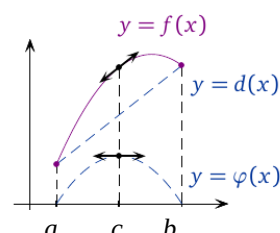
Il existe un réel  $c \in ]a, b[$  pour lequel :  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ , ou encore :  $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ .

Le théorème des accroissements finis généralise le théorème de Rolle. La morale de l'histoire ?

SI J'AI DES INFORMATIONS SUR  $f'$ , J'EN AI AUSSI SUR  $f$ .

Typiquement, toute majoration/minoration de  $f'$  peut être convertie en une majoration/minoration sur  $f$ .

**Démonstration** Notons  $d$  la fonction affine  $x \mapsto \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a)$  et  $\varphi$  la fonction  $f - d$ . Cette fonction  $\varphi$  est continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$  et :  $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ . Le théorème de Rolle affirme donc que  $\varphi'(c) = 0$  pour un certain  $c \in ]a, b[$ , ou encore :  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ . ■



### III-3) Sens de variations et dérivabilité :

#### Propriété 15

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

- (1)  $f$  est constante sur  $I$  si et seulement si  $f'$  est nulle sur  $I$ .
- (2)  $f$  est croissante (resp. décroissante) sur  $I$  si et seulement si  $f'$  est positive (resp. négative) sur  $I$ .

#### Preuve.

(1)  $\Rightarrow$  Immédiat.

$\Leftarrow$  Supposons que  $f' = 0$  sur  $I$ , et soit  $x, y \in I$ ,  $x < y$ . D'après le théorème des accroissements finis entre  $x$  et  $y$  ( $f$  étant continue sur  $[x, y]$  et dérivable sur  $]x, y[$  car dérivable sur  $I$ ), il existe  $c \in ]x, y[$  tel que  $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) = 0$ . Donc  $f(x) = f(y)$ .

(2) On traite le cas  $f$  croissante (l'autre cas s'en déduit en remplaçant  $f$  par  $-f$ ).

$\Rightarrow$  Soit  $a \in I$ . Alors, pour tout  $x \in I$ , avec  $x \neq a$ , on a  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$ . En faisant tendre  $x$  vers  $a$ , on obtient, par passage à la limite dans les inégalités, que  $f'(a) \geq 0$  pour tout  $a \in I$ .

$\Leftarrow$  Supposons  $f'$  à valeurs positives. Soit  $(x, y) \in I^2$  avec  $x < y$ . Par le théorème des accroissements finis ( $f$  étant continue sur  $[x, y]$  et dérivable sur  $]x, y[$  car dérivable sur  $I$ ), il existe  $c \in ]x, y[$  tel que  $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) \geq 0$  car  $f'(c) \geq 0$  et  $y - x > 0$ . Ainsi  $f(y) \geq f(x)$  et  $f$  est croissante.

□

#### Propriété 16

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

Si  $f'$  est strictement positive (resp. strictement négative), sauf éventuellement en un nombre fini de points de  $I$  où  $f'$  s'annule, alors  $f$  est strictement croissante (resp. strictement décroissante).

**Preuve.** Par l'absurde, si  $f$  n'est pas strictement croissante, alors il existe  $c < d$ ,  $c, d \in I$ , tels que  $f(c) = f(d)$ . Comme  $f$  est croissante, on a donc  $f|_{[c,d]}$  constante et alors  $f'$  est nulle sur le segment  $[c, d]$ . C'est en contradiction avec l'hypothèse de départ, donc  $f$  est strictement croissante. □

### III-4) Inégalité des accroissements finis :

#### Propriété 18 (Inégalité des accroissements finis)

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ .

1. S'il existe  $(m, M) \in \mathbb{R}^2$  tel que pour tout  $x \in ]a, b[$ ,  $m \leq f'(x) \leq M$ , alors  $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$ .
2. S'il existe  $M \geq 0$  tel que pour tout  $x \in ]a, b[$ ,  $|f'(x)| \leq M$ , alors  $|f(b) - f(a)| \leq M(b - a)$ .



## Fonctions lipschitziennes

**Rappel.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $k \geq 0$ . On dit que  $f$  est  $k$ -lipschitzienne (ou lipschitzienne de rapport  $k$ ) sur  $I$  si :

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

### Propriété 19

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable sur  $I$ . Si  $f'$  est bornée sur  $I$  par une constante  $M \geq 0$ , alors  $f$  est  $M$  lipschitzienne sur  $I$ .

**Preuve.** Il suffit d'appliquer l'inégalité des accroissements finis sur tout segment  $[x, y] : |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ .

□

## III-5) Règle de l'Hospital :

**Corollaire 4** (Règle de l'Hospital).

Soient  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions dérivables et soit  $x_0 \in I$ . On suppose que

- $f(x_0) = g(x_0) = 0$ ,
- $\forall x \in I \setminus \{x_0\} \quad g'(x) \neq 0$ .

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad (\in \mathbb{R}) \quad \text{alors} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

*Démonstration.* Fixons  $a \in I \setminus \{x_0\}$  avec par exemple  $a < x_0$ . Soit  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $h(x) = g(a)f(x) - f(a)g(x)$ .

Alors

- $h$  est continue sur  $[a, x_0] \subset I$ ,
- $h$  est dérivable sur  $]a, x_0[$ ,
- $h(x_0) = h(a) = 0$ .

Donc par le théorème de Rolle il existe  $c_a \in ]a, x_0[$  tel que  $h'(c_a) = 0$ . Or  $h'(x) = g(a)f'(x) - f(a)g'(x)$  donc  $g(a)f'(c_a) - f(a)g'(c_a) = 0$ . Comme  $g'$  ne s'annule pas sur  $I \setminus \{x_0\}$  cela conduit à  $\frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{f'(c_a)}{g'(c_a)}$ . Comme  $a < c_a < x_0$  lorsque l'on fait tendre  $a$  vers  $x_0$  on obtient  $c_a \rightarrow x_0$ . Cela implique

$$\lim_{a \rightarrow x_0} \frac{f(a)}{g(a)} = \lim_{a \rightarrow x_0} \frac{f'(c_a)}{g'(c_a)} = \lim_{c_a \rightarrow x_0} \frac{f'(c_a)}{g'(c_a)} = \ell.$$

□

