



Préing 1
Contrôle Continu n°1
Analyse II

L'usage de tout appareil électronique est interdit.

Date : **Lundi 17 mars 2025**

Durée : **1h00**

Nombre de pages : **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte 4 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

Un barème est fourni à titre indicatif.

◇◇◇

Exercice 1. [6,5 points]

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

On désignera à partir de maintenant par f cette fonction prolongée, donc définie sur \mathbb{R} .

2. *Question de cours* : Si $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction et $a \in I$, donner la définition de « g est dérivable en a », puis de « g est dérivable sur I ».
3. Montrer que la fonction f précédemment prolongée est dérivable sur \mathbb{R} .
4. La fonction f est-elle de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} ?

Exercice 2. [6,5 points]

Soit $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f(0) = f(1) = 0$ et $f'(0) = 0$.

1. On définit la fonction g par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ pour $x \in]0, 1[$. Justifier que g peut être prolongée en une fonction continue sur $]0, 1[$.
2. *Question de cours* : Rappeler l'énoncé du théorème de Rolle, pour une fonction h sur un intervalle $]a, b[$.
3. Montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $g'(c) = 0$.
4. Calculer l'expression de $g'(c)$ en fonction de $f(c)$ et $f'(c)$. En déduire, en utilisant la question précédente, que la tangente à la courbe de f en l'abscisse c passe par l'origine du repère.

Exercice 3. [3 points]

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer l'expression de la dérivée n -ème de $f : x \mapsto (x^3 + 2x - 7)e^x$.

Exercice 4. [4 points]

1. Déterminer un équivalent simple de (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{\ln(n+1) - \ln(n)}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}$$

2. Montrer à l'aide d'équivalents que la suite (v_n) converge vers e :

$$v_n = \left(1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$$