CY TECH	**Préing 1 :MI5, MIM2, GC et SUPMECA** **Devoir Surveillé 1**	
	Matière : **Analyse II** L'usage de tout appareil électronique est interdit	*Date :* **Mercredi** 13 **mars** 2024 *Durée :* **1h** *Nombre de pages :* **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications. *Le sujet comporte* 4 *exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.*

♣ ♣ ♣

Exercice 1 (6 points)**.** Soient $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$, et f une fonction définie de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{si } x \leq 0 \\ \sin x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Déterminer une condition pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer f' sur $\mathbb{R}^*$. A quelle condition f' est continue sur $\mathbb{R}$?
3. Déterminer f'' sur $\mathbb{R}^*$. A quelle condition f'' est continue sur $\mathbb{R}$?
4. En déduire les valeurs de a, b et c pour que f soit une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
5. f est-elle $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2 (7 points)**.** On considère la fonction f définie par

$$f(x) = xe^{\frac{1}{x}}, \quad x \in \mathbb{R}^*.$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et donner sa dérivée.
3. Soit $x > 1$. Rappeler le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[x, x+1]$.
4. En déduire
$$\lim_{x \to +\infty} (x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}.$$

Exercice 3 (7 points)**.** Suite à une épidémie dans une région, on examine le nombre de personnes malades durant une période de 45 jours. Le nombre de personnes malades est ainsi modélisé par la fonction

$$f(x) = 45x^2 - x^3 + 100\ , \quad x \in [0, 45].$$

En d'autres termes $f(x)$ est le nombre des malades après x jours.

1. Déterminer le nombre de personnes malades prévu par ce modèle au bout de 10 jours.
2. Montrer que la dérivée de la fonction f est
$$f'(x) = 3x(30 - x)$$
.
3. Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $[0, 45]$ et en déduire la variation de f.

Tournez la page SVP

4. Déterminer le jour où le nombre de personnes malades est maximal durant cette période de 45 jours tout en précisant le nombre des malades ce jours là.

Exercice 4 (2 points BONUS). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T.

1. Donner la définition d'une fonction périodique de période T.
2. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.