Algèbre 2
Préing 1
2024 – 2025

TD6 – Représentation matricielle et changements de base

1 Matrices représentatives

Exercice 1. Soient E et E' des espaces vectoriels de dimension 2 et soient $\mathscr{B} := (e_1, e_2)$ et $\mathscr{B}' := (e'_1, e'_2)$ des bases de E et E' respectivement. Soit $f\colon E \to E'$ l'application linéaire telle que $f(e_1) = 3e'_1 + 2e'_2$ et $f(e_2) = -e'_1 + e'_2$.

1. Soit $x := x_1 e_1 + x_2 e_2$ un vecteur quelconque de E. Exprimer $f(x)$ dans la base $\mathscr{B}'$.
2. Notons $X = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$ la matrice des coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$ et soit Y la matrice des coordonnées de $f(x)$ dans la base $\mathscr{B}'$. Écrire une égalité matricielle $Y = AX$ avec A une matrice à déterminer.
3. Soit $g\colon E' \to E$ l'application linéaire dont la matrice représentative dans la paire de bases $(\mathscr{B}', \mathscr{B})$ est $B := \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Soit $y := y_1 e'_1 + y_2 e'_2 \in E'$, déterminer l'expression de $g(y)$ dans la base $\mathscr{B}$.
4. Appliquer g au résultat de $f(x_1 e_1 + x_2 e_2)$ pour déterminer l'expression de $g\big(f(x_1 e_1 + x_2 e_2)\big)$ dans la base $\mathscr{B}$.
5. En déduire C, la matrice représentative de l'endomorphisme $f \circ g$ dans la base $\mathscr{B}$. Quelle relation y a-t-il entre les matrices A, B et C ?

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel de dimension 2 et soit $\mathscr{B} := (e_1, e_2)$ une base de E. Soient f et g des endomorphismes de E tels que :

$$f(e_1) = e_1 - e_2, \quad f(e_2) = 2e_1 + 3e_2, \quad g(e_1) = 4e_1 + 7e_2, \quad g(e_2) = 5e_1.$$

1. Déterminer $A := \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $B := \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$.
2. Déterminer les matrices représentatives de $f + g$ et $f \circ g$ dans la base $\mathscr{B}$.
3. Calculer $(f+g)(2e_1 + e_2)$ et $(f \circ g)(2e_1 + e_2)$ de deux façons différentes : par un calcul matriciel et par un calcul direct à partir de la définition de f et g.

Exercice 3. Déterminer les matrices dans les bases canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ des applications linéaires suivantes.

1. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) := (x - y,\ 2x,\ 3x + 2y)$.
2. $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $g(x, y, z) := (x - y + z,\ 2x - z)$.
3. $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 4. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ dont la matrice représentative dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ est :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ définie par $g(x, y, z) := (x - 2y + z,\ z - x)$.

1. Déterminer l'image du vecteur $u := (2, -3)$ par f.
2. Donner la matrice de g dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.
3. Les applications $f \circ g$ et $g \circ f$ sont-elles définies ? Si oui, donner leurs matrices dans les bases canoniques.
4. Déterminer l'expression analytique de $f \circ g$.

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel de dimension 4. Soit g un endomorphisme de E dont la matrice dans une base $\mathscr{B} := (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de E est :

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le déterminant de M.
2. L'application g est-elle injective ?
3. Calculer le rang de g.

2 Changements de base

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel de dimension 2 et soit $\mathscr{B} := (e_1, e_2)$ une base de E. Soient $e'_1 := e_1 + e_2$ et $e'_2 = e_1 - e_2$.

1. Montrer que $\mathscr{B}' := (e'_1, e'_2)$ est une base de E.
2. Soit $x := x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2$ un vecteur quelconque de E exprimée dans la base $\mathscr{B}'$. Déterminer les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$.
3. Exprimer e_1 et e_2 en fonction de e'_1 et e'_2.
4. Soit $x := x_1 e_1 + x_2 e_2$ un vecteur quelconque de E exprimé dans la base $\mathscr{B}$. Déterminer les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}'$.
5. Soient X et X' les matrices des coordonnées de x dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ respectivement. Écrire une relation matricielle entre X et X'.

Exercice 7. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et soit $\mathscr{B} := (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On considère les vecteurs :

$$u_1 := e_1 - 2e_2 + e_3, \quad u_2 := -e_1 + 3e_2 + e_3, \quad u_3 := e_1 + e_2 + e_3.$$

1. Soit $P := \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1, u_2, u_3)$. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
2. En déduire que $\mathscr{B}' := (u_1, u_2, u_3)$ est une base de E et donner l'expression de e_1, e_2 et e_3 dans cette base.
3. Déterminer les coordonnées de $u_1 + 2u_2 + 3u_3$ dans la base $\mathscr{B}$.
4. Déterminer les coordonnées de $e_1 + 2e_2 + 3e_3$ dans la base $\mathscr{B}'$.

Exercice 8. On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Rappeler ce qu'est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrer que $\mathscr{B}' := (1 - 3X^2, 2 + X - 5X^2, 1 + 2X)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer la matrice de passage de la base canonique à $\mathscr{B}'$.

Exercice 9. Soit E un espace vectoriel de dimension 2 et soit $\mathscr{B} := (e_1, e_2)$ une base de E. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $A := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{smallmatrix}\right)$. Déterminer la matrice de f dans la base :

1. $\mathscr{B}_1 := (e_2, e_1)$.
2. $\mathscr{B}_2 := (e_1 + e_2, e_1 - e_2)$.
3. $\mathscr{B}_3 := (2e_1 + 5e_2, -e_1 - 3e_2)$.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $f(P) := P + P'$.

1. Écrire la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B} := (1, X, X^2)$.
2. Quel est le rang de f ? L'application f est-elle inversible ?
3. Déterminer la matrice de passage P de $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}' := (1, 2X + 1, (X - 1)^2)$.
4. Déterminer la matrice représentative de f dans la paire de bases $(\mathscr{B}', \mathscr{B})$.
5. Vérifier que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times P$.

Exercice 11. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer l'expression analytique de f.

2. Déterminer des bases de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

3. On considère les vecteurs $u_1 := (1,1,-2)$, $u_2 := (0,1,0)$ et $u_3 := (-1,0,1)$.

- **a.** Montrer que $\mathscr{B}' := (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- **b.** Calculer $f(u_1)$, $f(u_2)$ et $f(u_3)$. En déduire la matrice D représentative de f dans la base $\mathscr{B}'$.
- **c.** Calculer la matrice P de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, et calculer son inverse.
- **d.** Écrire une relation entre A, D, P et P^{-1} et la vérifier.

Exercice 12. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

et soient $u_1 := (1,1,0)$, $u_2 := (1,2,1)$ et $u_3 := (-1,-2,-1)$.

1. Montrer que $\mathscr{B}' := (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Calculer $f(u_1)$, $f(u_2)$ et $f(u_3)$ dans la base $\mathscr{B}$ puis dans la base $\mathscr{B}'$.

3. En déduire la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}'$.

Exercice 13. On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ muni de sa base canonique $\mathscr{B}$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on pose $f(P) := (1-X)P' + 3P$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ et déterminer sa matrice A dans la base $\mathscr{B}$.

2. Déterminer une base et la dimension de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

3. Le noyau et l'image de f sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$?

4. Soient $P_0 := 1$, $P_1 := 1-X$, $P_2 := (1-X)^2$ et $P_3 := (1-X)^3$. Montrer que $\mathscr{B}' := (P_0, P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

5. Détermine la matrice représentative D de f dans la base $\mathscr{B}'$ et calculer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6. Déterminer la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ et calculer P^2. Qu'en déduit-on ?

7. Déterminer f^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 14. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le plan F d'équation $2x - y + z = 0$ et la droite D engendrée par le vecteur $(1,1,1)$. On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1.
- **a.** Montrer que F et D sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
- **b.** Déterminer une base (u_1, u_2) de F.
- **c.** Posons $u_3 = (1,1,1)$; justifier que $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Puisque $\mathbb{R}^3 = F \oplus D$, alors pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^3$, il existe des uniques vecteurs $v \in F$ et $w \in D$ tels que $u = v + w$. Le vecteur v est appelé le projeté de u sur F parallèlement à D ; on le note $p(u)$. On définit ainsi une application $p\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ qui à tout vecteur associe son projeté. L'application p est appelée la projection sur F parallèlement à D. On admet que c'est une application linéaire. L'objectif de l'exercice est de calculer l'expression de $p(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

2.
- **a.** Si $u \in F$, que vaut $p(u)$?
- **b.** Si $u \in D$, que vaut $p(u)$?
- **c.** En déduire la matrice de p dans la base $\mathscr{B}'$.

3.
- **a.** Calculer P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, ainsi que son inverse.
- **b.** En déduire la matrice de p dans la base canonique.

c. Donner l'expression de $p(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

Exercice 15. Les matrices suivantes sont-elles équivalentes ? semblables ?

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 16. Montrer que les matrices suivantes sont semblables.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Indication : Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A. Si B est la matrice de f dans une base (u_1,u_2,u_3), chercher une base de $\operatorname{Ker} f$ et de $\operatorname{Im} f$ en exprimant les vecteurs dans la base (u_1,u_2,u_3).

3 Un peu de géométrie

Exercice 17. Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel.

1. Soient F et G des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Pour tout vecteur $u\in E$, il existe un unique couple de vecteurs $(v,w)\in F\times G$ tels que $u=v+w$. Posons $p\colon E\to E$ l'application qui à tout $u\in E$ associe le vecteur v dans la décomposition précédente, et posons $s\colon E\to E$ l'application qui à tout $u\in E$ associe le vecteur $u-v$. L'application p est appelée la projection sur F parallèlement à G, et s est appelée la symétrie par rapport à F parallèlement à G.
   - **a.** Montrer que p et s sont des endomorphismes de E.
   - **b.** Déterminer $\operatorname{Ker} p$, $\operatorname{Im} p$, $\operatorname{Ker}(s-\mathrm{id}_E)$ et $\operatorname{Ker}(s+\mathrm{id}_E)$.
   - **c.** Montrer que $p\circ p=p$ et $s\circ s=\mathrm{id}_E$.
   - **d.** Montrer que $s=2p+\mathrm{id}_E$.
2. Soit $p\colon E\to E$ une application linéaire telle que $p\circ p=p$.
   - **a.** Monter que $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ sont supplémentaires dans E.
   - **b.** En déduire que p est la projection sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.
3. Soit $s\colon E\to E$ une application linéaire telle que $s\circ s=\mathrm{id}_E$.
   - **a.** Montrer que $\operatorname{Ker}(s-\mathrm{id}_E)$ et $\operatorname{Ker}(s+\mathrm{id}_E)$ sont supplémentaires dans E.
   - **b.** En déduire que s est la symétrie par rapport à $\ker(s-\mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\ker(s+\mathrm{id}_E)$.

Exercice 18. On se place dans $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{R}$–espace vectoriel et on note $\mathscr{B}:=(1,\mathrm{i})$ une base de $\mathbb{C}$. Soient f_θ et g_θ les applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définies par $f_\theta(z):=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\times z$ et $g_\theta(z):=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\times\overline{z}$, où $\theta\in\mathbb{R}$.

1. Montrer que f_θ et g_θ sont des endomorphismes de $\mathbb{C}$.
2.
   - **a.** Déterminer la matrice R_θ représentative de f_θ dans la base $\mathscr{B}$.
   - **b.** Exprimer $|f_\theta(z)|$ et $\arg(f_\theta(z))$ en fonction de $|z|$ et $\arg(z)$.
   - **c.** Décrire géométriquement l'application f_θ.
   - **d.** Montrer de deux façons différentes que $R_\theta\times R_{\theta'}=R_{\theta+\theta'}$.
3.
   - **a.** Déterminer la matrice S_θ représentative de g_θ dans la base $\mathscr{B}$.
   - **b.** Déterminer, s'ils existent, des complexes z_1 et z_2 tels que $g(z_1)=z_1$ et $g(z_2)=-z_2$.
   - **c.** Montrer que (z_1,z_2) est une base $\mathbb{C}$ et donner la matrice de g_θ dans cette base.
   - **d.** Décrire géométriquement l'application g_θ.

Exercice 19. Soit $E:=\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles. On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des fonctions paires et $\mathscr{I}$ l'ensemble des fonctions impaires.

1. Montrer que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ sont supplémentaires dans E.
2. Soit $\sigma\colon E\to E$ l'application définie par $\sigma(f)(x):=f(-x)$. Montrer que σ est la symétrie par rapport à $\mathscr{P}$ parallèlement à $\mathscr{I}$.