# TD2 – Espaces vectoriels

## 1 Sous-espaces vectoriels

**Exercice 1.** Tracer les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants, puis déterminer ceux qui sont stables par addition, ceux qui sont stables par multiplication par un scalaire, et ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.

1. $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0\}$.
2. $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 1\}$.
3. $C := \mathbb{Z}^2$
4. $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = |y|\}$.
5. $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$.
6. $F := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\}$.
7. $G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.
8. $H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\}$.

**Exercice 2.** Parmi les ensembles suivants, déterminer lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

1. $A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 4y - z = 0\}$.
2. $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 4y - z = 3\}$.
3. $C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2z = 3y\}$.
4. $D := \{(2\lambda,\ \lambda,\ -\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$.
5. $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 4z = 0 \text{ et } x + y + z = 0\}$.
6. $F := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 4z = 0 \text{ ou } x + y + z = 0\}$.

**Exercice 3.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$–espace vectoriel et soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$.

1. Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de $E$.
2. L'ensemble $F^c$ est-il un sous-espace vectoriel de $E$ ?
3. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $E$ si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

**Exercice 4.** Parmi les ensembles suivants, déterminer lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$.

1. $A := \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P'(X) = 2\}$.
2. $B := \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(X) = XP'(X) + P(0)\}$.
3. $C := \{P \in \mathbb{R}[X] \mid X^2 + 1 \text{ divise } P\}$.
4. $D := \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg P = n\}$ où $n \in \mathbb{N}$.
5. $E := \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg P \leq n\}$ où $n \in \mathbb{N}$.
6. $F := \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P \circ Q = Q \circ P\}$ où $Q(X) := X^2$.

**Exercice 5.** Parmi les ensembles suivants, établir lesquels sont des sous-espaces vectoriels de l'espace des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. $A := \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(1) = 0\}$.
2. $B := \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 1\}$.
3. $C := \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0)f(1) = 0\}$.
4. $D := \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ est bijective}\}$.
5. $E := \left\{f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \,\middle|\, \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0\right\}$.
6. $F := \{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f' + 2f = 0\}$.

**Exercice 6.** Dans l'espace vectoriel des suites réelles, déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels.

1. $A := \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}\}$.
2. $B := \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge}\}$.
3. $C := \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}\}$.
4. $D := \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est arithmétique}\}$.
5. $E := \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est géométrique}\}$.
6. $F := \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est stationnaire}\}$.

*Rappel : une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire si $\exists c \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ u_n = c$.*

## 2 Familles libres/liées

**Exercice 7.** On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

1. Écrire si possible le vecteur $v$ comme combinaison linéaire des vecteurs $u_1, u_2, u_3$ :
   a. $v := (1,-2,5)$, $u_1 := (1,1,1)$, $u_2 := (2,-1,1)$ et $u_3 := (1,2,3)$.
   b. $v := (2,-5,3)$, $u_1 := (1,-3,2)$, $u_2 := (2,-4,-1)$ et $u_3 := (1,-5,7)$.
2. Pour quelle(s) valeur(s) de $k$ le vecteur $u := (1,-2,k)$ est-il combinaison linéaire de $v := (3,0,-2)$ et $w := (2,-1,-5)$ ?

**Exercice 8.** Dans $\mathbb{R}^4$, soient les vecteurs $u := (-1,1,1,0)$ et $v := (0,0,1,1)$.

1. Montrer que $u$ et $v$ sont linéairement indépendants.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les réels $x, y, z, t$ pour que $(x, y, z, t) \in \operatorname{Vect}(u, v)$.
3. En déduire des équations cartésiennes du plan engendré par $u$ et $v$.

**Exercice 9.** Les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants sont-ils linéairement indépendants ? Donner les relations de dépendance linéaire le cas échéant.

1. $e_1 := (3,0,1,-2)$, $e_2 := (1,5,0,-1)$, $e_3 := (7,5,2,1)$.
2. $e_1 := (1,1,1,1)$, $e_2 := (1,1,1,-1)$, $e_3 := (1,1,-1,1)$, $e_4 := (1,-1,1,1)$.
3. $e_1 := (0,0,1,0)$, $e_2 := (0,0,0,1)$, $e_3 := (1,0,0,0)$, $e_4 := (0,1,0,0)$.
4. $e_1 := (2,-1,3,1)$, $e_2 := (1,1,1,1)$, $e_3 := (4,1,5,3)$, $e_4 := (1,-2,2,0)$.
5. $e_1 := (1,2,3,4)$, $e_2 := (1,1,1,3)$, $e_3 := (2,1,1,1)$, $e_4 := (-1,0,-1,2)$, $e_5 := (2,3,0,1)$.

**Exercice 10.** Soit $(u_1, u_2, u_3)$ une famille libre d'un espace vectoriel $E$. Soient $v_1$, $v_2$ et $v_3$ les vecteurs :

$$v_1 := 2u_1 + u_2 + 3u_3, \qquad v_2 := u_1 - u_2 - u_3, \qquad v_3 := u_1 + 2u_2 + u_3.$$

Montrer que la famille $(v_1, v_2, v_3)$ est libre.

**Exercice 11.** Soient $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{K}[X]$ des polynômes dont les degrés sont deux à deux distincts (c.-à-d. $\forall i, j \in \{1, \dots, n\},\ i \neq j \implies \deg P_i \neq \deg P_j$). Montrer que la famille $(P_1, \dots, P_n)$ est libre.

## 3 Bases et dimension

**Exercice 12.** Pour chaque famille de vecteurs, déterminer s'il s'agit d'une base de $\mathbb{R}^3$.

1. $A := \big((1,3,1),(1,3,0)\big)$
2. $B := \big((1,-1,0),(0,1,1),(1,1,1),(0,0,1)\big)$
3. $C := \big((1,0,1),(0,1,1),(2,1,3)\big)$
4. $D := \big((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\big)$

**Exercice 13.** Sachant que dans chaque cas, la famille $A$ est génératrice de $\mathbb{R}^4$ et la famille $B$ est libre, compléter la famille $B$ avec des vecteurs de la famille $A$ pour former une base de $\mathbb{R}^4$.

1. $A := \big((1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,0,1),(0,1,0,1)\big)$ et $B := \big((1,0,2,3),(0,1,-2,-3)\big)$.
2. $A := \big((1,0,0,0),(0,0,1,0),(5,1,11,0),(-4,0,-6,1)\big)$ et $B := \big((1,0,1,0),(0,2,0,3)\big)$.

**Exercice 14.** En utilisant des opérations élémentaires sur les vecteurs, donner une base et la dimension de $\operatorname{Vect}(A)$, $\operatorname{Vect}(B)$ et $\operatorname{Vect}(C)$.

1. $A := \big\{(1,0,1,-1),(3,-2,3,5),(2,-1,2,2),(5,-2,5,3)\big\}$.
2. $B := \big\{(1,0,1,2,-1),(0,1,-2,1,3),(2,1,0,5,1),(1,-1,3,1,-4)\big\}$.
3. $C := \big\{(1,2,0,1,0),(2,4,1,4,3),(1,2,2,5,-2),(-1,-2,3,5,4)\big\}$.

**Exercice 15.** Soient les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ :

$$E := \big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\big|\; y+z+t=0\big\}, \quad F := \big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\big|\; x+y=0 \text{ et } z=0\big\}.$$

Déterminer des bases de $E$, $F$ et $E \cap F$.

**Exercice 16.** Dans $\mathbb{R}^4$, soit $F := \text{Vect}(u, v, w)$ où $u := (1,1,-1,1)$, $v := (0,2,-1,2)$ et $w := (-2,-3,1,-1)$, et soit $H$ le sous-espace vectoriel :

$$H := \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, 2x - y + 4z + 3t = 0\right\}.$$

1. Montrer que $u$, $v$ et $w$ sont linéairement indépendants.
2. Montrer que $H$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$.
3. Montrer que $F = H$.

**Exercice 17.** Soient les polynômes $P_1(X) := 1 - X$, $P_2(X) := 1 - X^2$, $P_3(X) := X^3 - X^2 + X$, $P_4(X) := X^3 + X + 1$ et $P_5(X) := X^3$.

1. Sans calcul, dire si la famille $(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$ est libre ou liée.
2. Montrer que $(P_1, P_2, P_3, P_4)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Déterminer les coordonnées de $P_5$ dans cette base.

**Exercice 18.** Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Montrer que la famille $\left(1, X-\alpha, (X-\alpha)^2, \ldots, (X-\alpha)^n\right)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, et déterminer les coordonnées de tout polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base.

**Exercice 19.** Soit $E := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites réelles et soit $F$ l'ensemble :

$$F := \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \,|\, \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n\right\}.$$

1. Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$.
2. Soient $a_n := (-2)^n$ et $b_n := 3^n$. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des vecteurs de $F$.
3. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une famille libre.
4. L'objectif de cette question est de montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une famille génératrice de $F$. Fixons une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$. Pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :
$$v_n := \lambda a_n + \mu b_n.$$
   - **a.** Expliquer pourquoi $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$.
   - **b.** Montrer qu'il existe des valeurs de $\lambda$ et $\mu$ pour lesquelles $v_0 = u_0$ et $v_1 = u_1$.
   - **c.** Pour ces valeurs de $\lambda$ et $\mu$, démontrer par récurrence double que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n$.
   - **d.** En déduire que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une famille génératrice de $F$.
5. Quelle est la dimension de $F$ ?
6. Déterminer une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ telle que $u_0 = 0$ et $u_1 = 3$. Cette suite est-elle unique ?

## 4 Sommes de sous-espaces

**Exercice 20.** Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $F := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x - y + z = 0\right\}$ et $G := \text{Vect}(v)$ où $v := (-1,1,0)$.

1. Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et déterminer une base de $F$.
2. Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

**Exercice 21.** Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les sous-espaces vectoriels :

$$F := \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x + y = 0 \text{ et } z + t = 0\right\}, \qquad G := \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x - y = 0 \text{ et } z - t = 0\right\}.$$

1. Déterminer les dimensions de $F$ et de $G$.
2. Déterminer $F \cap G$.
3. En déduire que $F + G = \mathbb{R}^4$.

**Exercice 22.** Dans $\mathbb{R}^3$, soient $F$ le plan d'équation $x + y + z = 0$ et $G$ le plan d'équation $x + 2y + 3z = 0$.

1. Montrer que $F + G = \mathbb{R}^3$.
2. Sans déterminer $F \cap G$, justifier si $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

**Exercice 23.** Dans $\mathbb{R}^4$, soit $F$ le plan vectoriel dirigé par $u_1 := (2,3,0,1)$ et $u_2 := (-1,2,1,-2)$ et soit $G$ le plan vectoriel dirigé par $v_1 := (4,-1,-2,5)$ et $v_2 := (1,0,0,0)$.

1. Déterminer une base de $F+G$.
2. La somme est-elle directe ?

**Exercice 24.** Soit $E := \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$. Soit $F$ le sous-espace vectoriel :

$$F := \left\{ f \in E \,\middle|\, \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \right\},$$

et soit $G$ le sous-espace vectoriel des fonctions constantes.

1. Vérifier que $F$ et $G$ sont bien des sous-espaces vectoriels de $E$.
2. Montrer que $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $E$.

**Exercice 25.** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie et soient $F$, $G$ et $H$ des sous-espaces vectoriels de $E$.

1. Montrer que $(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G+H)$.
2. A-t-on l'inclusion contraire en général ?
3. Montrer que :

$$\dim(F+G+H) \leq \dim(F) + \dim(G) + \dim(H) - \dim(F \cap G) - \dim(F \cap H) - \dim(G \cap H) + \dim(F \cap G \cap H).$$