CY TECH	**Préing 1** **Examen Algèbre 2**	
	Matière : **Algèbre II** L'usage de tout appareil électronique est interdit. **Le barème est donné à titre indicatif**	*Date :* **Lundi 3 juin** 2024 *Durée :* **2h** *Nombre de pages :* **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.
Le sujet comporte 3 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.
L'énnoncé sera rendu dans la copie.

♣ ♣ ♣

Exercice 1. (8,5 points) Soit f_1 l'application définie par :

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z, t) & \longmapsto & x - y + 2t. \end{cases}$$

1. Montrer que f_1 est une application linéaire.

Soit f l'application définie par :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) & \longmapsto & (x - y + 2t\,,\, x + y + 2z\,,\, y + z - t)\,. \end{cases}$$

On admet par la suite que f est une application linéaire.

2. (a) Déterminer une base du noyau de f.
   (b) Déterminer les dimensions du noyau et de l'image de f.
   (c) L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
   (d) Déterminer une base de l'image de f.
3. (a) Compléter la base trouvée en 2(a) en une base de $\mathbb{R}^4$.
   (b) En déduire un supplémentaire du noyau.
4. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y - 2z\}$. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = F$.

Exercice 2. (9,5 points) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit f une application linéaire dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Soient $a = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $b = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $c = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Donner la formule analytique de f.
2. Soit $F = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = u\}$. Montrer que $F = \mathrm{Vect}(a)$.
3. Montrer que $\mathcal{B}' = (a, b, c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

4. Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ (la base canonique) à $\mathcal{B}'$, et calculer P^{-1}.
5. Calculer la matrice D représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$.
6. Par récurrence, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

7. Calculer A^n pour tout entier naturel $n \geq 1$.

Exercice 3. (4 points)

1. (a) Calculer le déterminant de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (b) En déduire si les vecteurs $u_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $u_2 = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ et $u_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ ou non.

2. Soit $m \in \mathbb{R}$ un paramètre. On considère la matrice :

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ 2 & m & 1 \\ m & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) À l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes et/ou les colonnes, calculer $\det(A_m)$ sous la forme d'un polynôme en m factorisé.

   (b) En déduire l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles la matrice A_m est inversible.