Préing 1, MI2-MI4-MI6-MEF1
Devoir Surveillé 1

Matière : **Algèbre II**	*Date :* **mardi 4 avril 2025**
L'usage de tout appareil électronique est interdit	*Durée :* **1h**
	Nombre de pages : **1**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte 4 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

♣ ♣ ♣

Exercice 1 (Questions de cours). **(4 pts)** Soient E et F des espaces vectoriels, et soient V et W des sous-espaces vectoriels de E de dimensions finies.

1. Écrire la formule de Grassmann appliquée à V et W. (1 pt)
2. Soit $f\colon E \to F$ une application. Donner la définition de : f est linéaire. (1 pt)
3. Soit $f\colon E \to F$ une application linéaire. Donner la définition de : f est un isomorphisme. (0.5 pt)
4. Démontrer que $\operatorname{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de E. (1.5 pts)

Exercice 2. (5 pts) Dans $\mathbb{R}^4$, on considère trois vecteurs :

$$u_1 = (1, 2, 1, 1), \quad u_2 = (2, 2, 1, 2), \quad u_3 = (3, 2, 0, 2).$$

1. Montrer que $\mathcal{A} = (u_1, u_2, u_3)$ est une famille libre. (2 pts)
2. Compléter $\mathcal{A}$ afin d'avoir une base de $\mathbb{R}^4$, que l'on note $\mathcal{B}$. (1 pt)
3. Trouver les coordonnées du vecteur $v = (1, 2, 3, 4)$ dans la base $\mathcal{B}$. (2 pts)

Exercice 3. (6 pts) Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z, t) = (x + 2y,\ x + 2y,\ x + y - z - t)$$

1. Montrer que f est une application linéaire. (1 pts)
2. Sans calcul, montrer que f n'est pas injective. (1 pt)
3. Déterminer une base du noyau et une base l'image de f. (3 pts)
4. A-t-on $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^4$? Justifier votre réponse. (1 pt)

Exercice 4. (5 pts) Sur $\mathbb{R}_3[X]$, on considère l'application φ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \quad \varphi(P) = 2P - (X+1)P'.$$

1. Montrer que φ est à valeurs dans $\mathbb{R}_3[X]$. (1 pt)
2. Montrer que $\varphi\colon \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ définie comme ci-dessus est une application linéaire. (1 pt)
3. Déterminer une base et la dimension du noyau de φ. (2 pt)
4. En déduire la dimension de l'image de φ. L'application φ est-elle surjective ? (1 pt)