CY TECH	**Préing 1, GCA-SUPMECA-MI3-MEF2** **Devoir Surveillé 1**

Matière : **Algèbre II** L'usage de tout appareil électronique est interdit	*Date :* **mardi 4 avril 2025** *Durée :* **1h** *Nombre de pages :* **1**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.
Le sujet comporte 4 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

♣ ♣ ♣

Exercice 1 (Questions de cours). **(4 pts)** Soit $f\colon E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels.

1. Donner la définition de l'image de f et du noyau de f. (1 pt)
2. Énoncer le théorème du rang (avec les hypothèses). (1.5 pts)
3. Démontrer que f est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$. (1.5 pts)

Exercice 2. (6 pts) Dans $\mathbb{R}^4$, on considère :

$$V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, y + 2z = 0\}.$$

1. Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. (1 pt)
2. Donner une base et la dimension de V. (2 pts)
3. Montrer que $u = (-4, 2, -1, 1) \in V$ et donner la coordonnée de u dans la base trouvée en question précédente. (2 pts)
4. Déterminer un sous-espace vectoriel W tel que $V \oplus W = \mathbb{R}^4$. (1 pt)

Exercice 3. (5 pts) Soit $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x,y,z,t) = (x - y,\ 0,\ x - y - z - t).$$

1. Montrer que f est une application linéaire. (1 pt)
2. Sans calculer $\operatorname{Ker} f$ ni $\operatorname{Im} f$, montrer que f n'est ni injective ni surjective. (2 pts)
3. Déterminer le noyau et l'image de f. (2 pts)

Exercice 4. (5 pts) Sur $\mathbb{R}_3[X]$, on considère l'application φ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \quad \varphi(P) = 3P - XP'.$$

1. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$, $\varphi(P) \in \mathbb{R}_2[X]$. (1 pt)
2. Montrer que $\varphi\colon \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie comme ci-dessus est une application linéaire. (1 pt)
3. Déterminer une base et la dimension de $\operatorname{Ker} \varphi$. (2 pts)
4. En déduire que φ est surjective. (1 pt)