Préing 1, GC–MI1–MIM2–SUPM
Devoir Surveillé 2

Matière : **Algèbre II**	*Date :* **mercredi 3 avril 2024**
L'usage de tout appareil électronique est interdit	*Durée :* **1h**
	Nombre de pages : **1**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications. *Le sujet comporte 4 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé. Le barème est indicatif.*

♣ ♣ ♣

Exercice 1 (3 pts, questions de cours)**.** Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel.

1. Soient $u_1, \dots, u_n \in E$, donner la définition de « $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille libre ».

2. Énoncer le théorème de la base incomplète.

Exercice 2 (6 pts)**.** Soit $(\mathcal{S})$ le système linéaire homogène :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 + 9x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases} \qquad (\mathcal{S})$$

1. Écrire la matrice A associée au système $(\mathcal{S})$.

2. Échelonner A par la méthode du pivot de Gauss.

3. Donner le rang de A.

4. Déterminer l'ensemble F des solutions de $(\mathcal{S})$.

5. En déduire que F est un sous-espace vectoriel dont on donnera une base, ainsi que la dimension.

Exercice 3 (5 pts)**.** Dans $\mathbb{R}^4$, on considère le sous-ensemble :

$$H = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, 2x - y - z + 2t = 0\right\}.$$

1. Démontrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

2. Déterminer une base de H.

3. En déduire la dimension de H.

Exercice 4 (6 pts)**.** Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs :

$$u_1 = (1, 2, 1, 1), \quad u_2 = (2, 2, 1, 1), \quad u_3 = (-1, 1, -1, 1),$$
$$v_1 = (2, 0, 1, 1), \quad v_2 = (1, -1, 2, -1), \quad v_3 = (0, 1, -1, 2), \quad v_4 = (1, 2, -2, 4), \quad v_5 = (-1, 1, -1, 2).$$

1. Montrer que la famille $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ est libre. Est-ce une base de $\mathbb{R}^4$?

2. Compléter $\mathcal{F}$ en une base de $\mathbb{R}^4$.

3. Déterminer les coordonnées du vecteur $u = (1, 0, 0, 1)$ dans cette base.

4. Justifier sans calculs que la famille $\mathcal{G} = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ est liée.

5. Déterminer les relations de liaison entre les vecteurs de $\mathcal{G}$.