



Préing 1, GCA-SUPMECA-MI3-MEF2

Devoir Surveillé 1

Matière : Algèbre II

L'usage de tout appareil électronique est interdit

Date : mardi 4 avril 2025

Durée : 1h

Nombre de pages : 1

*Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.
Le sujet comporte 4 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.*



Exercice 1 (Questions de cours). (4 pts) Soit $f: E \rightarrow F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels.

1. Donner la définition de l'image de f et du noyau de f . (1 pt)
2. Énoncer le théorème du rang (avec les hypothèses). (1.5 pts)
3. Démontrer que f est injective si et seulement si $\text{Ker } f = \{0_E\}$. (1.5 pts)

Exercice 2. (6 pts) Dans \mathbb{R}^4 , on considère :

$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y + 2z = 0\}.$$

1. Montrer que V est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 . (1 pt)
2. Donner une base et la dimension de V . (2 pts)
3. Montrer que $u = (-4, 2, -1, 1) \in V$ et donner la coordonnée de u dans la base trouvée en question précédente. (2 pts)
4. Déterminer un sous-espace vectoriel W tel que $V \oplus W = \mathbb{R}^4$. (1 pt)

Exercice 3. (5 pts) Soit $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x, y, z, t) = (x - y, 0, x - y - z - t).$$

1. Montrer que f est une application linéaire. (1 pt)
2. Sans calculer $\text{Ker } f$ ni $\text{Im } f$, montrer que f n'est ni injective ni surjective. (2 pts)
3. Déterminer le noyau et l'image de f . (2 pts)

Exercice 4. (5 pts) Sur $\mathbb{R}_3[X]$, on considère l'application φ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \quad \varphi(P) = 3P - XP'.$$

1. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$, $\varphi(P) \in \mathbb{R}_2[X]$. (1 pt)
2. Montrer que $\varphi: \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ définie comme ci-dessus est une application linéaire. (1 pt)
3. Déterminer une base et la dimension de $\text{Ker } \varphi$. (2 pts)
4. En déduire que φ est surjective. (1 pt)