CY TECH	**Préing 1, MI1, MI3, MEF2** **Devoir Surveillé 1**	
	Matière : **Algèbre II** L'usage de tout appareil électronique est interdit	*Date :* **mardi 4 mars 2025** *Durée :* **1h** *Nombre de pages :* **1**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications. *Le sujet comporte 4 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé. Le barème est indicatif.*

♣ ♣ ♣

Exercice 1 (Questions de cours, 4 pts). Soit E un espace vectoriel et soient $u_1, \dots, u_p$ des vecteurs de E.

1. Donner la définition de $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$. (2 pts)
2. Donner la définition de « $(u_1, \dots, u_p)$ est une famille génératrice de E ». (1 pt)
3. Application (1 pt) : dans $\mathbb{R}[X]$, déterminer une famille génératrice du sous-espace :

$$F = \left\{(b+c)X^2 + (a+c)X + (a+b) : (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}.$$

Exercice 2 (6 pts). Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ un paramètre, on considère le système linéaire $(\mathcal{S}_\lambda)$ ci-dessous :

$$\begin{cases} -x - 2y + 2z = -1 \\ -2x - 6y + 8z = -4 \\ 2x + 3y - (\lambda^2+1)z = 2 - \lambda \end{cases}$$

1. Écrire M_λ la matrice augmentée du système $(\mathcal{S}_\lambda)$. (1 pt)
2. Échelonner la matrice M_λ. (2 pts)
3. Donner le rang de M_λ en fonction de λ. À quelle condition sur λ le système $(\mathcal{S}_\lambda)$ est-il compatible ? (1 pt)
4. Résoudre le système $(\mathcal{S}_\lambda)$ en fonction de λ. On traitera à part le cas où $\mathrm{rg}(M_\lambda) < 3$. (2 pts)

Exercice 3 (4 pts). Justifier si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

1. $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x - y + 3z = 0\right\}$.
2. $B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 = z^2\right\}$.
3. $C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) = (2a-b,\ a+b,\ 3b)\right\}$.
4. $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x - y + 2z = 0 \text{ ou } 2x - z = 0\right\}$.

Exercice 4 (6 pts). Dans $\mathbb{R}[X]$, on considère les polynômes P_1, P_2, P_3 suivants :

$$P_1(X) = X^3 + X + 1, \quad P_2(X) = X^3 + X^2 + 1, \quad P_3(X) = X^3 + X^2 + X.$$

1. Montrer que (P_1, P_2, P_3) est une famille libre. (2 pts)
2. A-t-on $X^4 - X^3 + 1 \in \mathrm{Vect}(P_1, P_2, P_3)$? (1 pt)
3. Soient $Q(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (a,b,c,d) pour que $Q \in \mathrm{Vect}(P_1, P_2, P_3)$. (2 pts)
4. En déduire que le polynôme $X^3 + 2X^2 - X + 1 \in \mathrm{Vect}(P_1, P_2, P_3)$ et déterminer les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que :

$$X^3 + 2X^2 - X + 1 = \lambda_1 P_1(X) + \lambda_2 P_2(X) + \lambda_3 P_3(X). \qquad \text{(1 pt)}$$