CY TECH	**Préing 1, MI2, MI4, MI6, MEF1** **Devoir Surveillé 1**

Matière : **Algèbre II** L'usage de tout appareil électronique est interdit	*Date :* **mardi 4 mars 2025** *Durée :* **1h** *Nombre de pages :* **1**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications. *Le sujet comporte 4 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé. Le barème est indicatif.*

♣ ♣ ♣

Exercice 1 (Questions de cours, 4 pts)**.** Soit $(\mathcal{S})$ un système linéaire de m équations à n inconnues et soit A la matrice des coefficients de $(\mathcal{S})$.

1. Supposons que A est échelonnée en lignes, qu'appelle-t-on le rang de A ? (1 pt)

2. Si le rang de A est égal à m, que peut-on dire sur :

- **a.** l'existence de solutions ? (1 pt)
- **b.** l'unicité des solutions ? (1 pt)

3. Si A est échelonnée de rang r, combien de paramètres comporte une description paramétrique de l'ensemble des solutions (en supposant qu'il n'est pas vide) ? (1 pt)

Exercice 2 (6 pts)**.** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ un paramètre, on considère le système linéaire :

$$\begin{cases} x - 2y - 5z = 0 \\ -2x + 5y + 13z = 1 \\ 3x - 4y - 9z = \lambda \end{cases}$$

et on note F_λ l'ensemble de ses solutions.

1. Existe-t-il $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que F_λ soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? (1 pt)

2. Déterminer le rang du système (2 pts).

3. À quelle condition sur λ le système est-il compatible ? (1 pt)

4. Déterminer une description paramétrique de F_λ, lorsque le système est compatible. (2 pts)

Exercice 3 (5 pts)**.** Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs :

$$u_1 = (1, 1, 1, a), \quad u_2 = (0, 1, 2, -b), \quad u_3 = (1, 2, b, a - b).$$

1. Montrer que u_1, u_2 et u_3 sont deux à deux linéairement indépendants, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$. (1 pt)

2. Déterminer si la famille (u_1, u_2, u_3) est libre ou liée en fonction de $a, b \in \mathbb{R}$. (2 pts)

3. Dans le cas où la famille est liée, déterminer une relation de liaison entre les vecteurs. (2 pts)

Exercice 4 (5 pts)**.** Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_4[X]$, on considère le sous-ensemble :

$$F = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(0) = P'(0) = 0\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$. (2 pt)

2. Montrer que $F = \{X^2 Q(X) : Q \in \mathbb{R}_2[X]\}$. (2 pts)
Indication : on pourra procéder par double inclusion.

3. En déduire que (X^2, X^3, X^4) est une famille génératrice de F. (1 pt)